

Fraktální geometrie v informatice

Fractal Geometry in Informatics

Zadání bakalářské práce

Student: **Jan Svěží**

Studijní program: B2647 Informační a komunikační technologie

Studijní obor: 2612R025 Informatika a výpočetní technika

Téma: **Fraktální geometrie v informatice**
Fractal Geometry in Informatics

Zásady pro vypracování:

Fraktální geometrie je v současné době široce používaným nástrojem v mnoha oborech, biologií a ekonomii počínaje a teoretickou fyzikou konče. Bakalářská práce se bude zabývat možnostmi využití fraktální geometrie v informatice se zaměřením na vizualizaci a zpracování dat. Práce bude mít programátorský charakter a následující strukturu:

1. Shrnutí současného stavu na poli fraktální geometrie a jejího využití v oblasti informatických a technických věd.
2. Návrh algoritmů umožňující generovat fraktální objekty pomocí IFS a TEA algoritmu a demonstrující použití fraktální geometrie při zpracování dat (identifikace fraktálních struktur v časových řadách, výpočet fraktální dimenze,...).
3. Testování navržených algoritmů.
4. Vyhodnocení.
5. Závěr.

Seznam doporučené odborné literatury:

- [1] Peitgen H.O., Jurgens H., Saupe D., Chaos and Fractals, New Frontiers of Science, Springer-Verlag 1992, ISBN 3-540-97903-4
- [2] Barnsley M.F., Fractals Everywhere, Academic Press Professional 1993, ISBN 0-12-079061-0
- [3] Mandelbrot Benoit B., The Fractal Geometry of Nature, W. H. Freeman, 1982, ISBN 0716711869
- [4] Kůrková, V. Fraktální geometrie. Pokroky matematiky, fyziky a astronomie č.5, ročník 34, 1989.
- [5] Kůrková, V. Mandelbrotova fraktální geometrie. Vesmír č.8, 1988.
- [6] Zelinka I., Fraktální geometrie - principy a aplikace, BEN, Praha, 2006

Formální náležitosti a rozsah bakalářské práce stanoví pokyny pro vypracování zveřejněné na webových stránkách fakulty.

Vedoucí bakalářské práce: **prof. Ing. Ivan Zelinka, Ph.D.**

Datum zadání: 01.09.2013

Datum odevzdání: 07.05.2015



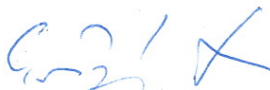
doc. Dr. Ing. Eduard Sojka
vedoucí katedry



prof. RNDr. Václav Snášel, CSc.
děkan fakulty

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně. Uvedl jsem všechny literární prameny a publikace, ze kterých jsem čerpal.

V Ostravě 8. dubna 2015

.....


Rád bych poděkoval panu profesoru Zelinkovi, díky kterému jsem měl možnost prozkoumat tak zajímavý obor, jakým je fraktální geometrie. Dále bych rád poděkoval všem lidem, kteří se mnou měli během studií tolik trpělivosti, a nejvíce pak mojí manželce, která mě celou dobu podporovala.

Abstrakt

Bakalářská práce se zabývá matematickým oborem fraktální geometrie a jejím využitím v informatice. Zaměřil jsem se na teoretický průzkum fraktální geometrie, definice a vlastnosti fraktálních objektů, algoritmů na jejich generování, a zejména pak na fraktální struktury v číselných řadách. K práci je přiložen software vytvořený v programovacím jazyce C++ s Qt implementující mnou navržené algoritmy.

Klíčová slova: Fraktální geometrie, fraktál, Mandelbrotova množina, Elliottovy vlny, systém iterovaných funkcí, Časově únikový algoritmus

Abstract

The bachelor thesis deals with the mathematical branch of the fractal geometry and its application in the informatics. I focused to the theoretical research of the fractal geometry, to the definitions and properties of the fractal objects, to the algorithms used for their rendering, and particularly to the fractal structures in the numerical series. The software created in the C++ with Qt programming language, implementing the algorithms designed by myself is attached to the thesis.

Keywords: Fractal geometry, fractal, Mandelbrot set, Elliott waves, Iterated function system, Escape-Time algorithm

Seznam použitých zkratek a symbolů

IFS	– Iterující funkční systém (Iterated function system)
ETA	– Časově únikový algoritmus (Escape-Time algorithm)
MIT	– Massachusettský technologický institut (Massachusetts Institute of Technology)
AAAS	– Americké asociace pro rozvoj vědy (American Association for the Advancement of Science)
PC	– Osobní počítač (personal computer)

Obsah

1	Úvod	7
2	Historie, vznik a obecný náhled na fraktální geometrii	9
3	Důležité osobnosti spojované se vznikem a výzkumem fraktální geometrie	13
3.1	Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor	13
3.2	Wacław Franciszek Sierpiński	13
3.3	Niels Fabian Helge von Koch	14
3.4	Gaston Maurice Julia	14
3.5	Felix Hausdorff	15
3.6	Aristid Lindenmayer	15
3.7	Benoit B. Mandelbrot	16
3.8	Edward Norton Lorenz	17
4	Fraktální geometrie	19
4.1	Základní matematické pojmy	19
4.1.1	Metrika a metrický prostor	19
4.1.2	Hausdorffova metrika	19
4.1.3	Kontraktivní zobrazení	20
4.2	Soběpodobnost	20
4.2.1	Přesná soběpodobnost	21
4.2.2	Statistická soběpodobnost	21
4.3	Soběpříbuznost	21
4.4	Geometricky hladký útvar	21
4.5	Geometricky členitý útvar	22
4.6	Dimenze fraktálů	23
4.6.1	Soběpodobnostní dimenze	23
4.6.2	Krabicová dimenze (anglicky box-counting dimension)	25
4.6.3	Hausdorffova - Besicovitchova dimenze	28
4.6.4	Výpočty fraktální dimenze některých útvarů	30
5	Konstrukce fraktálů	35
5.1	Algoritmus IFS (deterministický, stochastický)	35
5.1.1	„Hra chaosu“	38
5.2	Časově únikový algoritmus (ETA)	39
5.3	L-systémy	40
6	Fraktály	43
6.1	Klasické fraktály	44
6.1.1	Cantorovo diskontinuum	44
6.1.2	Sierpiňského trojúhelník	45
6.1.3	Kochova křivka	46
6.2	Juliova množina	48

6.3	Mandelbrotova množina	49
7	Inverzní fraktální problém	53
8	Využití fraktální geometrie v oblasti informatických a technických věd	55
8.1	Simulace fyzikálních, či biologických procesů	55
8.2	Fraktálová komprese digitálních obrazů	55
8.3	Fraktální vidění - analýza snímaného obrazu: rozpoznávání obličeje, otisků prstů a dalších	56
8.4	Počítačová grafika, artware	58
8.5	Analýza fluktuace cen na burzovním trhu	60
9	Fraktální struktury v časových řadách	61
9.1	Impulsní vlny	63
9.1.1	Rozšířená	63
9.1.2	Neúspěšná pátá	64
9.1.3	Diagonální trojúhelník	65
9.1.4	Diagonální pátá	65
9.1.5	Diagonální první	65
9.2	Korekční vlny	66
9.2.1	Cik-cak	66
9.2.2	Hladká	67
9.2.3	Trojúhelník	68
9.2.4	Kombinace korekčních vln: „Dvojitě a trojitě trojky“	68
9.3	Analýza Elliottových vln	69
9.4	Elliottovy vlny v přírodě	71
9.4.1	Experiment	72
10	Závěr	75
11	Reference	77

Seznam obrázků

1	Ukázky složitějších objektů	11
2	G. Cantor ^[42]	13
3	W. Sierpiński ^[43]	13
4	H. Koch ^[44]	14
5	G. Julia ^[17]	14
6	F. Hausdorff ^[45]	15
7	A. Lindenmayer ^[46]	15
8	B. Mandelbrot ^[20, 47]	16
9	E. Lorenz ^[21]	17
10	Lorenzův atraktor, tzv. „Motýlí efekt“ ^[48]	17
11	Krabicová dimenze hranice ČR	27
12	Krabicová dimenze Kochovy křivky - 5. iterace	31
13	IFS fraktál „strom“	38
14	Ukázky Juliovy množiny tvořené algoritmem ETA	40
15	Větvíčky generované L-systémem ve 3D ^[51]	42
16	Ďáblovo schodiště ^[52]	43
17	Několik iterací Cantorova diskontinua	45
18	Sierpiňského trojúhelník	46
19	Kochova křivka, Kochovy vložka a Kochova antivložka	47
20	Juliovy množiny	49
21	Mandelbrotova množina	51
22	Artware	59
23	Elliottovy vlny - opakování vzoru impulsní i korekční fáze ^[53]	61
24	Ukázky různých rozšíření impulsní vlny: část 1	63
25	Ukázky různých rozšíření impulsní vlny: část	64
26	Neúspěšná pátá v byčím a medvědí trendu	64
27	Diagonální pátá v byčím a medvědí trendu	65
28	Diagonální první v byčím a medvědí trendu	66
29	Korekční vlna cik-cak v byčím a medvědí trendu	67
30	Hladká korekční vlna v byčím a medvědí trendu	67
31	Korekční vlny typu trojúhelník v obou trendech	68
32	Měsíční záznamy aktivity Slunce z hlediska Elliottových vln	74

Seznam výpisů zdrojového kódu

1	ETA pro generování Juliových množin v C++ s Qt	39
2	ETA pro generování Mandelbrotovy množiny v C++ s Qt	52
3	Algoritmus analýzy Elliottových vln	73

1 Úvod

Doba jde stále kupředu a informační technologie už dávno nejsou jen nástrojem pro modelování „vykonstruovaných“ problémů. Vývoj informačních technologií jde ruku v ruce s formalizací a modelací přírodních úkazů a procesů. Možná také proto se obor fraktální geometrie stává tak populárním a hojně využívaným v technických i netechnických odvětvích.

Podíváme-li se okolo nás, zjistíme, že mnoho přírodních útvarů vykazuje fraktální charakter - stromy, keře a další rostliny, oblaka na nebi, hvězdná obloha, pohoří, mořské vlny, a jistým způsobem i dynamické systémy přírody, jako například pohyb vln vodní plochy vzhledem k pobřeží, nebo dokonce chování skupin lidí. Většina úkazů takového typu se chová zdánlivě chaoticky, ale při bližším zkoumání zjistíme, že je v nich řád, že jsou si vzájemně podobné, že jejich subelementy jsou podobné jim samotným, atd.

Vlastnosti, které jsem právě popsal, jsou základními vlastnostmi/principy fraktální geometrie. Při svém zkoumání jsem nabyl dojmu, že fraktální struktury vytváří sama příroda, a že fraktální geometrie popisuje přírodní struktury a jevy mnohem lépe, než klasická Eukleidovská geometrie.

Ve své bakalářské práci se zabývám základní teorií fraktální geometrie, jejím využitím v oblasti informatických a technických věd, způsobem generování fraktálních struktur a jejich základními vlastnostmi, a analýzou fraktálních struktur v časových řadách.

V první části práce shrnuji základní historické údaje o fraktální geometrii, obecný náhled na tento obor a důležité osobnosti, bez kterých bychom možná fraktální geometrii neznali.

V druhé části vysvětluji základní pojmy fraktální geometrie a zabývám se teoretickou, matematickou stránkou oboru.

Ve třetí části procházím jednotlivé způsoby konstrukce fraktálních struktur, věnuji se algoritmům implementujícím tyto způsoby a své algoritmy pak testuji v softwaru, který jsem během práce vytvořil.

Ve čtvrté části se věnuji využití fraktální geometrie v „reálném světě“.

V obsahu páté části práce se zabývám případem fraktálních struktur, který se hojně využívá k analýze a odhadu budoucího vývoje cenných papírů na burzovním trhu, tzv. Elliottovými vlnami.

V poslední části, která je spojená s částí předchozí, se snažím převést význam Elliottových vln na přírodní úkaz, konkrétně aktivitu Slunce. K pozorování a analýze využívám opět svého softwaru.

2 Historie, vznik a obecný náhled na fraktální geometrii

Přestože pojem „Fraktál“, potažmo „Fraktální geometrie“, je poměrně novodobým termínem (od roku 1975, kdy jej zavedl Benoit B. Mandelbrot), vznik fraktální geometrie musím začlenit již cca o sto let dříve, do konce 19. století.

V dřívějších dobách matematici brali v potaz převážně klasický Eukleidovský prostor, tedy „běžný“ 2D, 3D prostor, který zná „každý z nás“. Pracovali pouze s geometricky „ideálními“ objekty, jako např. čtverec, kružnice, krychle, koule, atd. Teprve na konci 19. století začali matematici zkoumat velmi členité útvary, které se od těchto ideálních nemálo odlišují. Prvním takovým útvarem vyvedl z míry Pruskou akademii věd Karl Weierstrass, jenž dne 18. července 1872 představil spojitou funkci, která nemá v žádném bodě derivaci. Roku 1884 pak přišel Georg Cantor s dalším „neideálním“ útvarem, množinou s nenulovou dimenzí menší než 1, Cantorovým diskontinuem aneb Cantorovou množinou. Inspirován Cantorovým diskontinuem přišel roku 1890 italský fyzik Giuseppe Peano s Peanovou křivkou, což je křivka vyplňující dvourozměrný prostor, a roku 1904 pak Helge von Koch s křivkou nekonečné délky ohraničující konečnou plochu, Kochovou křivkou. Útvary tohoto typu byly mnohými matematiky přijímány doslova s odporem a byly nazývány „matematickými monstry“ - Charles Hermite v dopise Thomasi Stieltjesovi roku 1893:

„Odvrátil jsem se s hrůzou a ošklivostí od toho politováníhodného zla, kterým jsou funkce bez derivace.“

Teprve později se však ukázalo, že „matematická monstra“ jsou mnohem vhodnější pro popis přírodních jevů, a to nejen v matematice, ale i v jiných oborech, např. ve fyzice. V roce 1918 představili Gaston Julia a Pierre Fatou konstrukci tzv. Juliových množin a roku 1919 pak Felix Hausdorff definoval Hausdorffovu dimenzi, která může být (a zpravidla bývá), narozdíl od dimenze topologické, neceločíselná a dokonce iracionální.

Ve fyzice byla situace do jisté míry podobná a výpočty se nejprve daly vyjádřit přesnými vzorci. Postupem času ale začalo při určitých výpočtech docházet k nepochopitelným potížím. Klasickým příkladem je např. „problém tří těles“. Zatímco analytické řešení výpočtu pohybu dvou vesmírných těles je proveditelné a jeho výsledky souhlasí s realitou, bylo dokázáno, že analytické řešení výpočtu pohybu tří těles se srovnatelnou hmotností neexistuje, protože při výpočtech dochází ke stavům, které vedou k chaotickému chování v situacích, které samy o sobě nijak chaotické nejsou.

Dalším příkladem je „Motýlí efekt“, který přednesl Edward N. Lorenz 29. prosince 1972 na 139. setkání „Americké asociace pro rozvoj vědy (AAAS)“. Lorenz se snaží odpovědět na otázku, zda „jedno mávnutí motýlích křídel v Brazílii může způsobit tornádo v Texasu?“ Podává jakýsi neformální důkaz nemožnosti předpovědět počasí, protože s velmi nepatrnými změnami výchozích podmínek predikce dostává zcela odlišné výsledky. Testování provedl na jím vytvořeném modelu počasí, který měl pouze tři proměnné měnící se v čase. Dokonce ani při zmenšování rozdílů dat nedostával spolehlivější odpovědi. Navíc v přednášce uvádí, že není-li znám počet „motýlů“ v atmosféře, hod-

noty jsou o to méně uspokojivé, a s tím je zřejmá souvislost předpovědi počasí. Opět tedy dochází k jakémusi chaotickému chování systému, kde vstupní podmínky jsou srovnatelné, a tudíž zdánlivě nechaotické.

Podobné chování vykazují i další úkazy, jako např. Brownův pohyb mikroskopických částic, turbulentní pohyby tekutin, vývoj klimatu, prosakování vody skrz zem, atd. Všechny tyto úkazy mají další společnou vlastnost, tou je podobnost sebe sama ve zvětšujících se detailech → zvětšujícím se měřítku. Na tuto podobnost poukazují právě i „matematická monstra“, která jsem uvedl v předchozím textu.

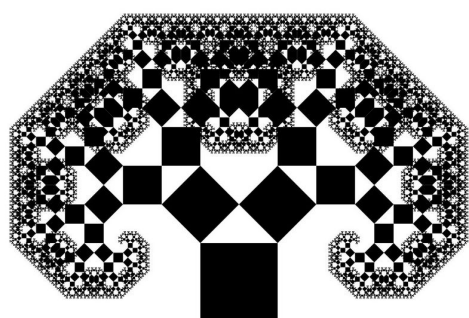
Některé z výše uvedených událostí vedly k „objevení“ fraktální geometrie a všechny z nich vykazují právě „fraktální charakter“. Benoit B. Mandelbrot, „otec“ fraktální geometrie, si poprvé povšimnul výše uvedené podobnosti při studiu chyb u přenosu signálů v telekomunikačních sítích. Ve sledovaných datech se střídaly intervaly bez chyb s intervaly chybnými. Když ale zpřesnil měření, bezchybné intervaly se rozpadaly opět na chybné a bezchybné subintervaly. Situace se opakovala při jakémkoliv zpřesňování měření, což Mandelbrotovi připomnělo Cantorovo diskontinuum.

Podruhé se s tímto fenoménem Benoit B. Mandelbrot setkal při studiu kolísání tržních cen, kdy si všiml, že krátkodobý časový průběh je podobný dlouhodobému. Poté se začal o problematiku více zajímat. Všiml si například, že i v přírodě se vyskytuje tento druh podobnosti - mnohé přírodní jevy byly téměř neměnné, ať se na ně díval z jakéhokoliv měřítka, např. mapy pobřeží (členitost pobřeží), růst rostlin a některých krystalů, aerosoly, či dokonce distribuce galaxií. Tuto vlastnost Mandelbrot nazval „soběpodobnost“.

Velmi podstatným Mandelbrotovým výzkumem, vedoucím k „objevení“ fraktální geometrie, bylo pozorování dat, která naměřil vědec Lewis F. Richardson. Data obsahovala údaje o délkách různých pobřeží. Richardson si všiml, že změřit délku pobřeží je poměrně složité, protože závisí na délce měřidla. Uvědomil si, že pokud bychom nekonečně zmenšovali měřidlo, délka pobřeží by se zvětšovala k nekonečné délce. Richardson poté odvodil vzorec pro výpočet délky pobřeží, a ten závisel pouze na dvou konstantách, které jsou pro dané pobřeží nezaměnitelné. Tyto dvě konstanty ale neměly úplně jasný význam. Tento jim dodal až B. B. Mandelbrot, protože přepsaný vzorec pro výpočet délky pobřeží mu připomněl Hausdorffovu míru a dimenzi.

Proč tedy fraktální geometrie? Protože na popsání tvaru stromů, keřů, hor, blesku, mraků na nebi, hvězd, galaxií a mnoha dalších útvarů přírody prostě Eukleidovská geometrie nestačí. Pomocí klasické Eukleidovské geometrie jsme schopni popsat „jednoduché, hladké“ útvary jako např. čtverec, obdélník, n-úhelník, elipsu, krychli, kouli, kužel, a další klasické geometrické objekty, ale postavíme-li před sebe úkol popsat tvar Pythagorova stromu^{1a}, Kochovi vločky, či většiny přírodních úkazů, např. sněhové vločky, či kapradiny^{1b}, popis pomocí Eukleidovské geometrie by nás stál mnoho času a úsilí, byl by nesmírně složitý, a stejně bychom pravděpodobně nedošli k uspokojivému výsledku. Pomocí fraktální geometrie je to ale možné s mnohem menším úsilím a s mnohonásobně uspokojivějším výsledkem. Právě jsem tedy udal první důvod „proč fraktální geometrie?“. Dalším rozdílem mezi geometrií Eukleidovskou a fraktální je dimenze. Ano, žijeme v prostoru (dimenze = 3), díváme se na filmy, či kreslíme obrázky na plátno (dimenze = 2), víme,

že čára má dimenzi rovnu 1, ale co např. výše uvedená délka pobřeží ostrova? Je její dimenze opravdu rovna 1 (jako dimenze běžné křivky), jak „říká“ klasická Eukleidovská geometrie? Fraktální geometrie by na to „odpověděla“, že ne. Fraktální dimenze délky pobřeží ostrova je totiž desetinné číslo mezi 1 a 2 (cca 1.25). Ale když se nad tím zamyslím, tak to vlastně dává smysl, vždyť délka pobřeží konverguje k nekonečnu dle velikosti měřítka, takže je to vlastně „víc“, než křivka \Rightarrow dimenze je větší než 1, ale zároveň rozhodně nevyplní celou plochu \Rightarrow dimenze je menší než 2.



(a) Pythagorův strom^[49]



(b) Kapradina^[50]

Obrázek 1: Ukázky složitějších objektů

Michael F. Barnsley napsal ve své knize *Fractals Everywhere* ^[4]:

„Fraktální geometrie vás donutí vidět vše rozdílným způsobem, než doposud. Číst dále může být nebezpečné. Riskujete ztrátu dětského vidění mraků, lesů, galaxií, listí, ...“

Já bych si dovolil nesouhlasit s druhou částí. Ano, fraktální geometrie vás donutí vidět vše rozdílným způsobem než doposud, a to protože dodnes jste znali jen Eukleidovskou geometrii. Ale myslím, že děti vidí „lépe“, než dospělí - vždycky jsem věděl, že strom či hora jsou mnohem složitější, než kužel, že mraky nejsou žádné kruhy, elipsy, atd. Naopak si myslím, že fraktální geometrie vám „otevře oči“, najednou vše dává větší smysl, geometrie je nyní mnohem blíže všemu okolo nás.

Dalšími důležitými vlastnostmi, na kterých je (společně s fraktální dimenzí) fraktální geometrie postavena, jsou „soběpodobnost a soběpříbuznost“. Tyto pojmy říkají, že zvětšíme-li měřítko a přiblížíme si tak část objektu, tato část bude opět podobná celku. V přírodě je samozřejmě zjevný omezený počet těchto změn měřítka - podíváme-li se např. na kapradinu, zvětšíme měřítko a přiblížíme výřez na jednu část kapradiny s okrajem, dostaneme opět útvar vypadající, jako původní kapradina. Tohle přibližování ale samozřejmě nemůžeme dělat do nekonečna, protože po několika výřezech narazíme jen

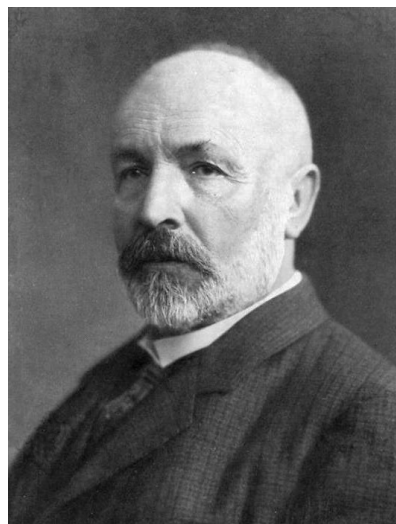
na pupeny, ze kterých sice časem vyrostou další lístečky, ale zatím nejsou vidět. V matematických výpočtech můžeme teoreticky měnit měřítko v nekonečně mnoha iteracích.

Jak jsem ve stručnosti uvedl výše, fraktální geometrie je velmi účelové odvětví moderní matematiky a nachází mnohá uplatnění nejen v informatice. Fraktální geometrie se využívá např. při kompresi a rekonstrukci digitálních obrazů, počítačovém vidění, artware (umění na počítači), šifrování dat, zkoumání biologických procesů - např. EKG, modelování fyzikálních procesů - např. Brownův pohyb, agregace molekul v elektrolytu, modelování chemických procesů - např. roztoky, zkoumání pohybu tržních cen v ekonomii (tzv. Elliottovy vlny), a v mnoha dalších oborech.

3 Důležité osobnosti spojované se vznikem a výzkumem fraktální geometrie

3.1 Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor

Georg Cantor se narodil 3. března 1845 v Rusku v Petrohradě. V 11 letech emigroval do Německa. Rok studoval na univerzitě v Curychu, kde skončil kvůli úmrtí otce. Na univerzitě v Berlíně, kam se poté přestěhoval, navštěvoval přednášky Karla Weierstrasse a dalších vynikajících matematiků. Po doktorátu roku 1867 učil na dívčí škole v Berlíně. V roce 1869 obhájil habilitační práci na univerzitě v Halle, kde pracoval a získal docenturu. Vyřešil velmi obtížný problém, s nímž si nevěděli rady jeho kolegové Heinrich Heine, Rudolf Lipschitz, či Georg Rieman. Roku 1872 byl povýšen na „profesora bez křesla“ a 1879 pak na „úplného profesora.“ G. Cantor byl velkým přínosem matematickému světu. Do fraktální geometrie přispěl jedním z nejznámějších a nejprozkoumanějších fraktálů, Cantorovým diskontinuem neboli Cantorovou množinou se zajímavými vlastnostmi. ^[14]



Obrázek 2: G. Cantor ^[42]

3.2 Waclaw Franciszek Sierpiński

Waclaw Sierpiński se narodil 14. března 1882 ve Varšavě v Polsku. Matematický talent u něj byl objeven hned jeho prvním učitelem matematiky. Bohužel žil v době okupace Polska, a tak možnost vzdělání nebyla jednoduchá. Přesto v r. 1899 nastoupil na „mat-fyz“ univerzity ve Varšavě. V r. 1903 nabídla fakulta cenu za nejlepší esej z teorie čísel, kterou Sierpiński vyhrál s oceněním zlaté medaile. Se získáním titulu „kandidát matematických věd“ měl ale problém, protože bylo nutné splnit zkoušku z ruského jazyka, kterou polští studenti hromadně bojkotovali. Učitelé se „obávali“, že by to mohl být první případ, kdy má student výborné ze všech předmětů, přijatou disertační práci a zlatou medaili, a přitom titul nezíská. Nakonec dostal z ruského jazyka dobrou a r. 1904 odpromoval s titulem. Doktorát dokončil na univerzitě v Krakově a od r. 1908 pracoval na univerzitě ve Lvově. Sierpiński se dále zabýval teorií množin a v r. 1916 představil další fraktál Sierpińského trojúhelník. ^[15]



Obrázek 3: W. Sierpiński ^[43]

3.3 Niels Fabian Helge von Koch

Helge von Koch se narodil 25. ledna 1870 ve Stockholmu ve Švédsku. Navštěvoval tamní školu, kterou úspěšně ukončil r. 1887 a nastoupil na Stockholmskou univerzitu. První matematické úspěchy zaznamenal při studiu nekonečně mnoha lineárních rovnic s nekonečně mnoha neznámými. V r. 1891 a 1892 napsal dvě práce na aplikaci nekonečně mnoha determinantů při řešení systému diferenciálních rovnic s analytickými koeficienty. Řešení založil na metodách H. Poincarého. Tato pozorování shrnul ve své doktorské dizertační práci. Mezi lety 1893 a 1905 dostal Koch několik pracovních nabídek asistenta univerzitního profesora. Přihlásil se o „křeslo“ na univerzitě v Uppsale, ale místo nedostal. Nakonec se stal předsedou „čisté matematiky“ na KTH ve Stockholmu (Královský technologický institut). H. Koch přispěl k fraktální geometrii roku 1906 slavnou Kochovou křivkou. ^[16]



Obrázek 4: H. Koch ^[44]

3.4 Gaston Maurice Julia

Gaston Julia se narodil 3. února 1893 v Sidi del Abbès v Alžírsku. Od dětství se zajímal o hudbu a matematiku. Několikrát přeskočil měsíce a dokonce i roky studia, a přitom dosahoval nadprůměrných výsledků. Hrál na housle a zamiloval se do Bacha, Schumanna a Schuberta. U přijímacích zkoušek na dvou nejprestižnějších francouzských školách, École normale supérieure (ENS) a École Polytechnique, se umístil jako první. Rozhodl se pro ENS, kam nastoupil r. 1911. 1. sv. v. jej donutila studium přerušit a narukoval. Byl mnohokrát raněn a postřelen doprostřed obličeje. Díky této ráně přišel o nos a po zbytek života byl nucen nosit kožený pásek. Ve výzkumu pokračoval roku 1916 na „Francouzské koleji“ (prestižní vědecká instituce) a r. 1917 získal doktorát. 1918 se oženil s jeho ošetřující sestřičkou a spolu měli 6 dětí. Již v 25 letech Julia napsal 199 stránkové dílo, které jej proslavilo, a za které získal ocenění Grand Prix akademie věd. V r. 1925 byl jmenován profesorským předsedou aplikované analýzy a geometrie na univerzitě v Sorbonne, 1931 předsedou diferenciálního a integrálního počtu, a v r. 1937 předsedou geometrie a algebry na École Polytechnique. Byl vynikající matematik, slavný ve 20. letech. Poté byl bohužel „zapomenut“, až než jeho práce inspirovala B. Mandelbrota. Gaston



Obrázek 5: G. Julia ^[17]

Julia měl široké spektrum matematického zájmu. Před jeho smrtí bylo vydáno 6 svazků s jeho prací. Během života napsal 232 publikací - 157 výzkumných prací, 30 knih a 45 článků o historii věd a jiných tématech a získal mnoho ocenění. V r. 1950 získal vyznamenání „Řád čestné legie“ s hodností důstojníka. K oboru fraktální geometrie Julia přispěl množinami, které jsou známé především díky jejich grafickému vyobrazení, tzv. „Juliových množin“. ^[17]

3.5 Felix Hausdorff

Felix Hausdorff se narodil 8. listopadu 1868 ve Vratislavi v Polsku. V dětství se přestěhoval do Lipska, kde začal studovat matematiku, přestože snil o povolání skladatele. Roku 1891 získal doktorát za aplikace matematiky v astronomii. Habilitační práci věnoval astronomii a optice. Pohyboval se spíše mezi umělci, než matematiky. Sám napsal několik literárních děl a úspěšnou frašku. V r. 1902 byl povýšen na profesora matematiky. Do r. 1910 učil na univerzitě v Lipsku, a poté v Bonnu. Roku 1913 získal titul profesora na univerzitě v Greifswalfu. Kvůli židovskému původu byl r. 1935 donucen ukončit práci. 1941 byl naplánován jeho přesun do koncentračního tábora, kam díky požadavku Bonnské univerzity nemusel. O rok později byl však přesun obnoven. S manželkou a její sestrou spáchali sebevraždu. F. Hausdorffa proslavil obor topologie a teorie množin. Významný „objev“, který představil r. 1919 byla tzv. „Hausdorffova dimenze“, na které fraktální geometrie staví. ^[18]



Obrázek 6: F. Hausdorff ^[45]

3.6 Aristid Lindenmayer

Aristid Lindenmayer se narodil 17. listopadu 1925 v Budapešti v Maďarsku. Od r. 1943 studoval chemii a biologii na tamní univerzitě. Roku 1956 udělal na Michiganské univerzitě doktorát z fyziologie rostlin. O 12 let později byl povýšen na profesora biologie a filozofie životních věd na nizozemské univerzitě v Utrechtu, kde také od roku 1972 předsedal skupině teoretické biologie. Zajímal se o vláknité houby a jednoduché mnohobuněčné řasy a organismy a studoval vztahy mezi buňkami rostlin. Do světa fraktální geometrie vstoupil ve známost díky tzv. „L-systémům“ (Lindenmayerovým systémům), které r. 1968 navrhl pro modelování růstu těchto organismů. ^[19]



Obrázek 7: A. Lindenmayer ^[46]

3.7 Benoit B. Mandelbrot

Benoit Mandelbrot, „otec“ fraktální geometrie, kterou mj. pojmenoval dle latinského slova „fractus“ (zložený, rozbitý, ...), si všiml a ukázal světu, že fraktály se objevují nejen v matematice, ale také v přírodě, což popisuje ve své nejslavnější knize „The Fractal Geometry of Nature“ [2], kterou napsal r. 1982.

Benoit Mandelbrot se narodil 20. listopadu 1924 ve Varšavě. Roku 1936 emigroval s rodinou do Paříže, kde ho strýc, profesor matematiky, začal učit svůj obor. Do začátku 2. sv. v. navštěvoval vysokou školu v Paříži, a poté se přestěhoval do města Tulla. Toto období bylo kvůli strachu o život „chaotické“, a proto se věnoval samostudiu. Po návratu do Paříže prošel přijímacími zkouškami na École Normale i École Polytechnique, a to i navzdory jeho nedokonalým znalostem čisté matematiky, které se příliš nevěnoval, protože do ní byl „tlačen“ strýcem. Mandelbrot měl ale pozoruhodnou geometrickou intuici a představivost, což mu dávalo unikátní vhled do různých matematických problémů.

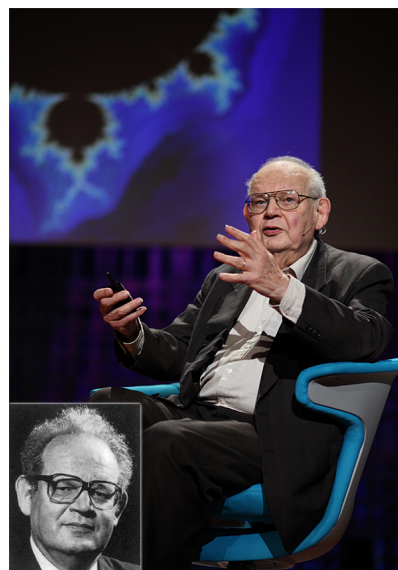
Po dokončení studií na École Polytechnique emigroval do Spojených států, kde nejprve navštěvoval Kalifornský technický institut a později, po získání Ph. D., Institut pro pokročilá studia na Princetonu.

B. Mandelbrot pracoval v IBM, kde mu byl umožněn výzkum nekonvenčních částí matematiky. Zde se také poprvé setkal s fraktálním charakterem zkoumaného problému, konkrétně s pohybem cen bavlny. Ceny se od sebe odlišovaly, ale posloupnost změn nezávisela na čase. S podobným úkazem se potýkal při studiu poruch telekomunikačního signálu a zkoumal i neobvyklá data, jako např. tisícileté záznamy o stavu vody Nilu. Po odchodu z IBM získal podobnou příležitost na Univerzitě Yale, kde se stal uznávaným profesorem matematických věd (v angličtině: Sterling Professor).

V r. 1945 ukázal Mandelbrotovi jeho strýc výzkum G. Julia, s nímž se neztotožnil. K tomuto výzkumu se ale oklikou dostal r. 1970 přes vlastní práci. Díky dostupnosti počítačové grafiky ve společnosti IBM Mandelbrot ukázal, že Juliova práce je zdrojem nejkrásnějších fraktálů dnešní doby. Pro jejich vizualizaci vyvinul Mandelbrot jeden z prvních počítačových programů pro tisk grafiky.

Mandelbrot dosáhl velkých úspěchů v různých vědeckých oborech, např. čestný titul doktora věd na univerzitě v St. Andrews, dva tituly profesora na Harvardu, profesora na Yaleu, a také na École Polytechnique. Získal mnoho ocenění, např. Barnardovu medaili za zasloužilé služby vědě, Franklinovu medaili, cenu Alexandra von Humboldta, Řád čestné legie, a Wolfovu či Japonskou cenu.

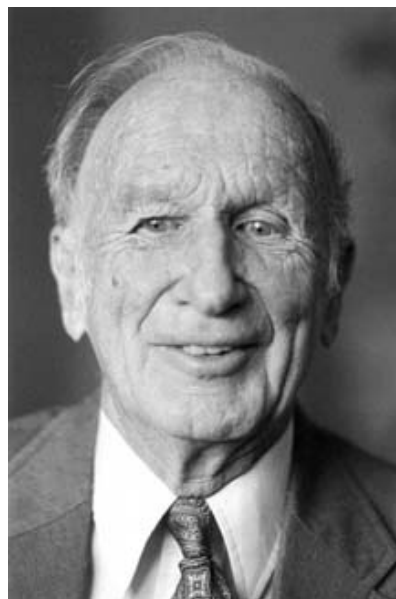
Mandelbrot objevil fraktální struktury v mnoha odvětvích vědy a ve světě okolo nás. Byl jedním z „velikánů“ dnešní doby. Zavedl pojem fraktálu a „jeho“ fraktál, Mandelbrotova množina, se stal symbolem fraktální geometrie. [1, ?]



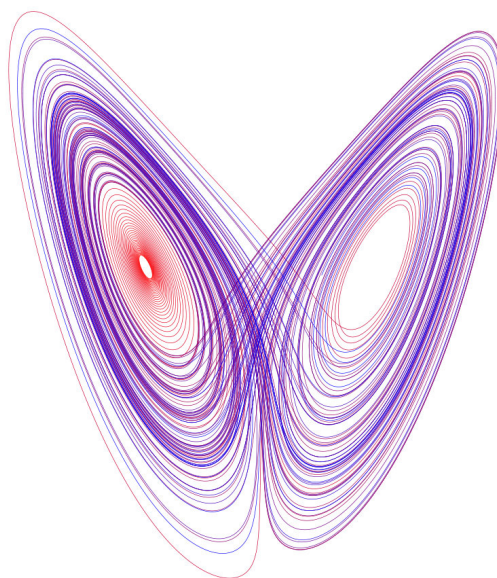
Obrázek 8: B. Mandelbrot [20, 47]

3.8 Edward Norton Lorenz

Edward Lorenz se narodil 23. května 1917 v USA. Roku 1938 ukončil titulem bc. studium matematiky v Darmouthu. Titul S.M. získal na Harvardu. Poté se zavázal do vojenské služby k letectvu USA, kde aplikoval své matematické znalosti k předpovědi počasí. Roku 1943 dokončil na MIT druhé magisterské studium, tentokrát z meteorologie. Z tohoto oboru získal r. 1948 doktorát, byl povýšen na meteorologa, a v r. 1962 na profesora meteorologie. Slavným po celém světě jej udělal počítačový výzkum modelu atmosféry. Po získání prvních výsledků spustil výpočet z jiného místa, a po dokončení zjistil, že výsledky se značně liší. Zkoušel upravovat vstupní data, a přestože je měnil minimálně, výsledky byly velmi rozdílné. E. Lorenz objevil chaos. Výzkum později představil na přednášce s názvem „Predictability: Does the Flap of a Butterfly’s Wings in Brazil Set off a Tornado in Texas?“ (Předvídatelnost: Způsobí mávnutí motýlích křídel v Brazílii tornádo v Texasu?) na 139. setkání AAAS^[9]. Termín „Butterfly effect“ (Motýlí efekt) se poté stal symbolem teorie chaosu.^[21]



Obrázek 9: E. Lorenz ^[21]



Obrázek 10: Lorenzův atraktor, tzv. „Motýlí efekt“ ^[48]

4 Fraktální geometrie

Fraktální geometrie je obor matematiky, zabývající se popisem „nekonečně členitých“ útvarů. Jedná se o velmi složité útvary, které lze těžko, nebo dokonce vůbec popsat klasickou Eukleidovskou geometrií. Fraktální geometrie vznikla jako obor, kterým je možné matematicky popsat objekty v přírodě. Stěžejními vlastnostmi fraktální geometrie jsou soběpodobnost a soběpříbuznost, tzn. výřez nějakého objektu, např. hlávky kvěťáku, se jeví stejným, jako celý objekt, a nezávislost, neboli invariance těchto vlastností vůči měřítku, např. křivka opisující tvar pobřeží, se bude jevit stejně členitá, ať použijeme třicetimetrové pravítko, desetimetrovou tyč, turistickou mapu, nebo vezmeme satelitní snímky.

4.1 Základní matematické pojmy

Abych mohl definovat „ryze“ fraktální vlastnosti, je nutné znát několik základních matematických pojmů, které jsou používány naskrz fraktální geometrií.

4.1.1 Metrika a metrický prostor

Metrika určuje vzdálenost dvou bodů v prostoru. Mějme $M \neq \emptyset$ a množinu nezáporných čísel $R_+ = \langle 0, \infty \rangle$, zobrazení

$$d : M \times M \rightarrow R_+ \quad (1)$$

je metrikou na M , když pro každé $x, y, z \in M$ platí:

$$\begin{aligned} d(x, y) &\geq 0; d(x, x) = 0, \\ d(x, y) &= 0 \Leftrightarrow x = y, \\ d(x, y) &= d(y, x), \\ d(x, y) &\leq d(x, z) + d(z, y). \end{aligned} \quad (2)$$

Uspořádaná dvojice (M, d) se nazývá „metrický prostor“. Platí-li navíc $\lim_{x \rightarrow \infty} x_i = p_0$ pro každou cauchyovskou posloupnost $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$, $x_i \in M$, je metrický prostor (M, d) úplný.^[1]

4.1.2 Hausdorffova metrika

Mějme metrický prostor (M, d) a systém $\mathcal{H}(M)$ všech neprázdných kompaktních (omezených a uzavřených) podmnožin M . Pro $A, B \in \mathcal{H}(M)$ zavedme nejmenší poloměr okolí množiny B , který obsahuje A jako konečné číslo $\delta(A, B) \geq 0$:

$$\delta(A, B) = \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} d(a, b). \quad (3)$$

Hausdorffova metrika je pak zobrazení $h : \mathcal{H}(M) \times \mathcal{H}(M) \rightarrow R_+$ takové, že

$$h(A, B) = \max\{\delta(A, B), \delta(B, A)\} \quad (4)$$

Hausdorffova metrika je metrikou dle podmínek 2 a dvojice $(\mathcal{H}(M), h)$ tvoří metrický prostor.^[1]

4.1.3 Kontraktivní zobrazení

Nechť (M, d) je metrický prostor. Zobrazení $f : M \rightarrow M$ je na množině $A \subseteq M$ kontraktivní, existuje-li číslo $\vartheta \in (0, 1)$ takové, že pro každé $p, q \in A$ platí:

$$d(f(p), f(q)) \leq \vartheta \cdot d(p, q). \quad (5)$$

Zobrazení f se také nazývá kontrakce a konstanta ϑ je kvocientem kontrakce.^[1]

4.2 Soběpodobnost

Soběpodobnost je jednou z hlavních vlastností fraktálních objektů. Jako slovo má poměrně jasný intuitivní význam. Jak je to ale v matematice ve fraktální geometrii? Jedná se o vlastnost objektu popisující fakt, že část celku je podobná jemu samému v jakémkoliv měřítku, tzn. zvětšuji-li objekt v jeho libovolné části („přibližuji“ ji), část zůstává stále podobná celku. Co znamená podobná? Volně řečeno, daná část je pouze transformovaný celek zmenšený v určitém měřítku. Soběpodobnost je také nazývána invariancí (neměnností) vůči změně měřítka.

Matematicky definoval pojem soběpodobnosti J. E. Hutchinson. Vycházel z faktu, že podmnožina je pouze geometricky podobná „zmenšenina“ celku.

Nechť E je podmnožina n -rozměrného eukleidovského prostoru \mathbb{R}^n . Existuje-li konečně mnoho kontraktivních, či afinních zobrazení

$$f_1, f_2, \dots, f_m : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (6)$$

pro která platí

$$E = \bigcup_{i=1}^m f_i(E), \quad (7)$$

a pro libovolné $i \neq j$ existuje

$$f_i(E) \cap f_j(E), \quad (8)$$

který je prázdný nebo roven konečné množině bodů.

4.2.1 Přesná soběpodobnost

Jsou rozlišovány dva druhy soběpodobnosti - „přesná“ a „statistická“. První z nich, přesná soběpodobnost, je definovaná vztahem 7. Vzniká opakováním sebe sama pomocí afinních transformací - posunutí, rotace, změna měřítka, zrcadlení, zkosení, projekce (zejména však prvních tří). Nejsou tedy jen zmenšenými kopiemi sebe sama (byť mohou být), ale transformovanými kopiemi, tzn. že se iterativně opakuje stejný „motiv“, který je právě ukazatelem vzájemné podobnosti.

4.2.2 Statistická soběpodobnost

Popisuje soběpodobnost, do které zahrnuje určitý prvek náhody. Vychází z toho, že přírodní útvary nikdy nejsou přesnými transformovanými kopiemi sebe sama. Takové útvary jsou nepravidelné a nedají se generovat deterministickými algoritmy.

Řekněme tedy, že množina E je statisticky soběpodobná, je-li sjednocením soběpodobných množin dle vztahu 7, kde každá $f_i(E)$ má stejné statistické charakteristiky, jako množina E . Oproti přesné soběpodobnosti, která je soběpodobná vzhledem k daným transformacím, jsou vzhledem k těmto transformacím soběpodobné určité statistické charakteristiky. V praxi se pak sleduje např. shoda odhadů střední hodnoty a směrodatné odchylky.

Statistická soběpodobnost je tedy jakýmsi doplňkem soběpodobnosti přesné. Přesná soběpodobnost popisuje fraktály generované jednoduchými deterministickými algoritmy, např. Cantorovo diskontinuum, Sierpiňského trojúhelník, Kochova křivka a další. Statistická soběpodobnost pak popisuje algoritmy, kde hraje svou roli náhoda, např. Brownův pohyb.

4.3 Soběpříbuznost

Existují ale i jiné fraktály, které sice nejsou soběpodobné dle vztahu 7, ale jsou generovány deterministickými algoritmy bez jakéhokoliv prvku náhody. Stojí tedy někde na hranici mezi přesnou a statistickou soběpodobností. Takové množiny jsou pak nazývány „soběpříbuzné“.

4.4 Geometricky hladký útvar

Geometricky hladký útvar je takový útvar, který je deterministicky / jednoznačně definovatelný a spočítatelný. Pomocí klasické eukleidovské geometrie se popisují právě takové

útvary. Jedná se o běžné geometrické objekty, jako např.: přímka, křivka, čtverec, trojúhelník, válec, kužel, koule, atd., které mají několik společných vlastností. Pro „definici“ geometricky hladkého útvaru jsou důležité dvě. První vlastností je, že je-li něco spočítatelného určitým vztahem či vzorcem, výsledek se nemění v závislosti na měřítku nebo jednotce. Spočítáme-li např. objem krychle, nezávisí na tom, v jaké jednotce jej spočítáme, nebo kolikrát si krychli zvětšíme, objem zůstává neměnný. Tato vlastnost platí i u obsahů, obvodů, délek stran, atd. Druhou je jejich „rozměr“. Všechny geometricky hladké objekty jsou jednoznačně popsány konečným počtem parametrů. Přímka, nebo křivka jsou dány jedním parametrem, tzn. každý bod na křivce je dán jedním číslem, např. přímka $2x + 3$, nebo sinusoida $\sin(x)$. To ale neznamená, že přímku, nebo křivku nemůžeme zobrazit ve vícerozměrném prostoru, jedná se pouze o jednoznačné určení polohy jednoho konkrétního bodu x na dané křivce. Pro určení polohy bodu v obdélníku jsou nutné 2 parametry a bod v kouli je určen 3 parametry. Vždy se jedná o celé číslo, které nazýváme (topologická) dimenze, neboli rozměr.

4.5 Geometricky členitý útvar

Členitý, nebo nekonečně členitý útvar je opak objektu hladkého. Útvar tohoto typu má fraktální charakter - je na něm vidět mnoho „zlomů“, jeho tvar je velmi složitý. Perfektním příkladem je opět výše zmiňovaná délka pobřeží ostrova. Oproti geometricky hladkým útvarům, změříme-li obvod pobřeží dle satelitních snímků, dostaneme délku x , změříme-li ji ale např. dle turistické mapy, zahrneme více detailů, a dostaneme délku y , která bude větší, než délka x , a tak to bude pokračovat při zmenšování délky měřidla (teoreticky do nekonečna). Uvedený příklad byl reálně zkoumán Lewis F. Richardsonem, který z pozorování určil empirický vzorec pro výpočet délky pobřeží:

$$K(\epsilon) = N(\epsilon)\epsilon^D; \epsilon > 0 \quad (9)$$

$K(\epsilon)$...	délka aproximace pobřeží závislá na délce měřidla
$N(\epsilon)$...	počet úseček o délce měřidla nutný k určení aproximace
ϵ	...	délka měřidla
D	...	konstanta ovlivňující délku pobřeží

Význam konstanty D si Richardson nedokázal vysvětlit, ale pozorováním a experimenty dospěl k závěru, že je pro výpočet nepostradatelná. Její význam pochopil a popsal až B. Mandelbrot, který si uvědomil její souvislost s Hausdorffovou - Besicovitchovou / fraktální dimenzí, která je další odlišnou vlastností od dimenze geometricky hladkého útvaru.

4.6 Dimenze fraktálů

„Jak je fraktál velký?“, „Je jeden fraktál větší, než jiný?“. Na tyto otázky je, vzhledem k povaze fraktálu, poměrně těžké odpovědět. Existují ale čísla, kterými je možné srovnat dva různé fraktály ve smyslu míry. Lze např. říci, že Kochova křivka „je větší“, než Cantorovo diskontinuum. Tato čísla se získávají různými způsoby. V některých případech jsou si rovna, v jiných se liší, v určitých situacích mají smysl jen některá z nich. Souhrnně se takovým číslem říká „fraktální dimenze“. Popisují jak „hustě“ neboli do jaké míry fraktál zaplňuje prostor, ve kterém je definován.

Fraktální dimenze je číslo použitelné v reálném světě. Je možné určit dimenzi pobřeží nějakého ostrova, obvod průřezu mraků, povrch koruny stromů, či vzorku kůže a mnoha dalších úkazů. Fraktální dimenze nám také poskytuje způsob, jak porovnat množiny z reálného světa s „umělými“ fraktály.^[4]

Jak jsem uvedl výše, existuje několik druhů fraktální dimenze, resp. dimenze obecně. Jsou to např. topologická dimenze, Hausdorffova dimenze, soběpodobnostní, krabicová, kapacitní a další. Různé dimenze se hodí použít v různých situacích. Mezi všemi těmito dimenzemi však existují určité vztahy.^[3]

Srovnám např. délku dvou jednorozměrných křivek. Jak jsem popsal v kapitole 4.4, délka geometricky hladké křivky se nemění v závislosti na tom, jestli ji přiblížím, oddálím, nebo ji měřím v různých jednotkách. Budu-li zmenšovat velikost měřidla, budu se přibližovat k nějaké limitní hodnotě. Oproti tomu délka (nekonečně) členité křivky, např. křivky „opisující“ pobřeží ostrova se s nekonečně se zmenšujícím měřidlem nekonečně zvětšuje (viz kapitola 4.5). Dá se tedy říct, že tato křivka zabírá v rovině více místa, než křivka geometricky hladká, avšak celou rovinu rozhodně nevyplní. Její dimenze je tedy větší než 1 (topologická dimenze geometricky hladké křivky), ale zároveň menší než 2 (topologická dimenze roviny). Je tedy zřejmé, že dimenze tohoto útvaru (fraktálu) není, resp. nemusí být, celočíselná. Dimenze fraktálních útvarů, fraktální dimenze, bývá tedy neceločíselná, z angl. „fractional dimension = zlomková dimenze“.

K definici fraktálu, kterou uvedl B. Mandelbrot se využívá srovnání obou dimenzí, kde hodnota desetinné části čísla určuje právě „fraktálnost“, neboli členitost objektu, a také rychlost, jakou „rozměr“ (délka v rovině, povrch v prostoru, atd.) fraktálu roste k nekonečnu. Vysvětlím tedy některé z dimenzí.

4.6.1 Soběpodobnostní dimenze

Prvním typem dimenze, kterým se chci zabývat je tzv. „soběpodobnostní dimenze“, která vychází z jakéhosi charakteristického faktoru změny měřítka (označím jej f_s).

Např.:

objekt	počet částí n	f_s
úsečka	2	$\frac{1}{2}$
	4	$\frac{1}{4}$
	10	$\frac{1}{10}$
čtverec	$4 = 2^2$ (hrana o délce $\frac{1}{2}$)	$\frac{1}{2}$
	$16 = 4^2$ (hrana o délce $\frac{1}{4}$)	$\frac{1}{4}$
	$100 = 10^2$ (hrana o délce $\frac{1}{10}$)	$\frac{1}{10}$
krychle	$8 = 2^3$ (hrana o délce $\frac{1}{2}$)	$\frac{1}{2}$
	$64 = 4^3$ (hrana o délce $\frac{1}{4}$)	$\frac{1}{4}$
	$1000 = 10^3$ (hrana o délce $\frac{1}{10}$)	$\frac{1}{10}$

Z tabulky je vidět, že mezi počtem částí n a faktorem změny měřítka f_s je vztah

$$n = \frac{1}{f_s^D}, \quad (10)$$

kde D je topologická dimenze objektu. Pro úsečku platí například:

$$\begin{aligned} 2 &= \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^1} \\ 2 &= \frac{1}{\frac{1}{2}} \\ 2 &= 2 \end{aligned}$$

Vezmu-li ale nějaký složitější útvar, např. Kochovu křivku, je faktor změny měřítka méně intuitivní. Přesto lze parametry n a f_s snadno vydedukovat. Při každé iteraci vzroste počet částí každé hrany na 4 a její délka se zmenší na $\frac{1}{3}$ původní velikosti.

objekt	počet částí n	f_s
Kochova křivka	4 (1. iterace)	$\frac{1}{3}$
	16 (2. iterace)	$\frac{1}{9}$
	4^k (k. iterace)	$\frac{1}{3^k}$

Budu-li předpokládat platnost vztahu 10, pak pro 1. iteraci Kochovi křivky platí:

$$\begin{aligned}
 4 &= \frac{1}{\frac{1}{3} D_s} \\
 4 &= 3^{D_s} \\
 \log 4 &= D_s \cdot \log 3 \\
 D_s &= \frac{\log 4}{\log 3} \\
 D_s &\approx 1.2619
 \end{aligned}$$

Zkusím platnost ověřit pro další iteraci:

$$\begin{aligned}
 D_s &= \frac{\log 16}{\log 9} \\
 D_s &= \frac{\log 4^2}{\log 3^2} \\
 D_s &= \frac{2 \cdot \log 4}{2 \cdot \log 3} \\
 D_s &= \frac{\log 4}{\log 3}
 \end{aligned}$$

Soběpodobnostní dimenze je odvozena zobecněním tohoto postupu: ^[3]

$$\begin{aligned}
 n &= \frac{1}{f_s^{D_s}} \\
 f_s^{D_s} &= n^{-1} \\
 D_s \cdot \log f_s &= -\log n \\
 D_s &= -\left(\frac{\log n}{\log f_s} \right) \\
 D_s &= \frac{\log n}{-\log f_s} \\
 D_s &= \frac{\log n}{\log \left(\frac{1}{f_s} \right)}
 \end{aligned} \tag{11}$$

4.6.2 Krabicová dimenze (anglicky box-counting dimension)

Pro složitější útvary, jako např. obvod průřezu mraků na nebi, pobřeží ostrova atd., není možné využít výpočet soběpodobnostní dimenze, protože takové útvary nejsou sobě-

podobné ve smyslu výše uvedených pravidel (dle Hutchinsonovy definice 7). K určení dimenze útvarů (fraktálů) tohoto typu popíši druhý typ dimenze, tzv. „krabicovou dimenzi“^[1] (z anglického „box-counting dimension“). Krabicovou dimenzi je možné určit pro jakýkoliv objekt v rovině, či prostoru.

Princip tkví v umístění objektu na mřížku o velikosti strany a a zjištění nejmenšího možného počtu „krabic“ (čtverců ve 2D a krychlí ve 3D) potřebných pro pokrytí objektu. Jelikož je počet závislý na velikosti strany a , označím jej $N(a)$. Zmenšováním mřížky a vykreslováním do diagramu „log / log“ (osa x : $\log \frac{1}{a}$, osa y : $\log N(a)$) získáme krabicovou dimenzi, která je dána směrnici aproximační přímky grafu.

Při procesu zmenšování mřížky je vhodné délku strany a volit vždy dvakrát menší, než v předchozím kroku, tedy dle posloupnosti $\frac{1}{2^k}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, čímž získáme posloupnost počtu boxů $N(2^{-k})$. Směrnice aproximační přímky je dána vztahem:

$$\frac{\log N(2^{-(k+1)}) - \log N(2^{-k})}{\log 2^{k+1} - \log 2^k}. \quad (12)$$

Po zjednodušení

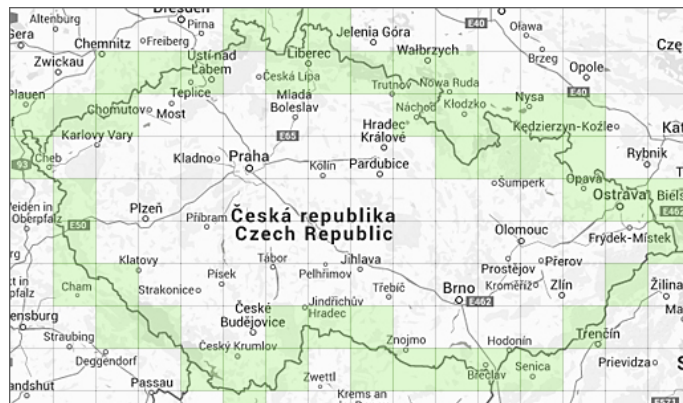
$$\frac{\log \frac{N(2^{-(k+1)})}{N(2^{-k})}}{\log \frac{2^{k+1}}{2^k}} = \frac{\log \frac{N(2^{-(k+1)})}{N(2^{-k})}}{\log 2}$$

získáme vzorec pro výpočet směrnice φ pomocí logaritmu se základem 2

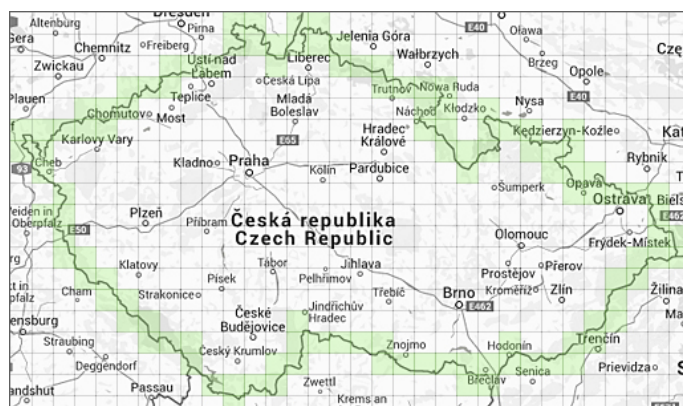
$$\log_2 \frac{N(2^{-(k+1)})}{N(2^{-k})}. \quad (13)$$

Výsledek je tedy faktor, kterým roste počet boxů od jedné mřížky k další, tj. odhad krabicové dimenze objektu. Jinými slovy, roste-li počet boxů dle faktoru 2^{D_k} , zatímco strana mřížky se zmenšuje na polovinu, pak krabicová fraktální dimenze je rovna D_k .

Pokusím se např. určit dimenzi hranice České republiky. Připravím obrázek ČR s mřížkami dvou hustot, $\frac{1}{16}$ a $\frac{1}{32}$:



$$(a) a = \frac{1}{16}, N(a) = 48$$



$$(b) a = \frac{1}{32}, N(a) = 114$$

Obrázek 11: Krabicová dimenze hranice ČR

Dosazením do vztahu 12 získám dimenzi D_k :

$$D_k = \frac{\log 114 - \log 48}{\log 32 - \log 16}$$

$$D_k \approx 1.2479$$

Prověřím ekvivalenci vztahu 12 se vztahem 13:

$$D_k = \log_2 \frac{114}{48}$$

$$D_k \approx 1.2479$$

Krabicová dimenze hranice České republiky je tedy přibližně 1.2479.

Krabicová dimenze je ve většině případů rovna dimenzi soběpodobnosti, avšak v některých případech se odlišuje. Je možné ji využít na výpočet dimenze objektů, které nejsou soběpodobné. Často je používána pro určení fraktální dimenze v počítačích, protože je poměrně přímočará pro implementaci. [3]

4.6.3 Hausdorffova - Besicovitchova dimenze

Všechny fraktální dimenze mají jeden společný základ, kterým je třetí a poslední fraktální dimenze, kterou se budu zabývat, Hausdorffova dimenze, nebo také Hausdorffova - Besicovitchova dimenze. K definici Hausdorffovy dimenze v Eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$ je nutné znát několik pojmů, které nyní představím.

Prvním z nich je vzdálenost dvou bodů v prostoru \mathbb{R}^n :

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}, \quad (14)$$

dále pak infimum a supremum podmnožiny $X \subseteq \mathbb{R}^n$:

$$\begin{array}{ll} \inf(x \in X) & \dots \text{ je největší dolní hranice / závora } X \\ \sup(x \in X) & \dots \text{ je nejmenší horní hranice / závora } X \end{array}$$

průměr podmnožiny $U \subseteq \mathbb{R}^n$ je dán vztahem

$$\text{diam}(U) = \sup\{d(x, y) \mid x, y \in U\}, \quad (15)$$

a posledním pojmem je otevřené pokrytí množiny $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Nejprve vysvětlím slovo „otevřené“. Podmnožina U je otevřená, pokud pro každé $x \in U$ existuje malá kulička $B_\epsilon(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid d(x, y) < \epsilon\}$ s poloměrem $\epsilon \geq 0$ a středem v bodě x , která leží kompletně v U .

Množina otevřených podmnožin $U = \{U_1, U_2, \dots\} \in \mathbb{R}^n$ se nazývá otevřené (spočetelné) pokrytí množiny A , platí-li

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i. \quad (16)$$

Nyní mohu definovat Hausdorffovu míru a dimenzi.

Mějme $s, \epsilon > 0 \in \mathbb{R}$ a otevřené pokrytí $U = \{U_1, U_2, \dots\}$ množiny A a definujme vztah

$$h_\epsilon^s(A) = \inf \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} \text{diam}(U_i)^s \mid i \in \mathbb{N}, \text{diam}(U_i) < \epsilon \right\}, \quad (17)$$

tzn. infimum je bráno přes všechna pokrytí s průměrem menším, než ϵ . Suma ve vztahu může být jak konečná, tak nekonečná. Budeme-li snižovat ϵ , zmenšuje se počet možných pokrytí A , a infimum roste. To nás vede k limitě s $\epsilon \rightarrow 0$. Píšeme

$$h^s(A) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} h_\epsilon^s(A). \quad (18)$$

Číslo $h^s(A)$ se nazývá s -dimenzionální Hausdorffova míra množiny A , pro kterou například platí, že je-li $A = \emptyset$, pak $h^s(A) = 0$, je-li $A \subset B$, pak $h^s(A) \leq h^s(B)$, dále pak $h^1(A)$ je délka hladké křivky A , $h^2(A)$ je plocha hladkého povrchu A , a další.

Hausdorff navíc prokázal, že existuje číslo $D_H(A)$ takové, že platí

$$h^s(A) = \begin{cases} \infty & \text{pro } s < D_H(A) \\ 0 & \text{pro } s > D_H(A). \end{cases}$$

Hausdorffova dimenze množiny A je právě číslo $D_H(A)$ z předchozího vztahu a je definována předpisem

$$D_H(A) = \inf\{s \mid h^s(A) = 0\} = \sup\{s \mid h^s(A) = \infty\}. \quad (19)$$

Výpočet Hausdorffovy dimenze je poměrně komplikovaný, a proto není výhodný pro běžné výpočty fraktálních dimenzí. Jedním z největších problémů je výpočet $\sum_{i=0}^{\infty} \text{diam}(U_i)^s$. Tento problém se dá např. zjednodušit nahrazením výrazu $\text{diam}(U_i)^s$ termínem ϵ^s . Definice Hausdorffovy - Besicovitchovy dimenze jakékoliv ohraničené podmnožiny $A \subseteq \mathbb{R}^n$ je pak dána vztahem:

$$d_H = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\epsilon)}{\ln \frac{1}{\epsilon}} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\epsilon)}{\log \frac{1}{\epsilon}} \quad (20)$$

$N(\epsilon)$... minimální počet elementárních útvarů potřebných k pokrytí uvažovaného objektu (např. úseček o délce ϵ v \mathbb{R}^1 , nebo čtverců se stranou ϵ v \mathbb{R}^2 , atd.).

Pro některé jednoduché útvary, jako např. úsečku, čtverec, krychli atd. není nutné brát v úvahu limitu. Vypuštěním limity z výpočtu se vztah opět zjednoduší. Takové zjednodušení je ale funkční jen v některých případech, a proto se častěji používá výpočet s limitou.

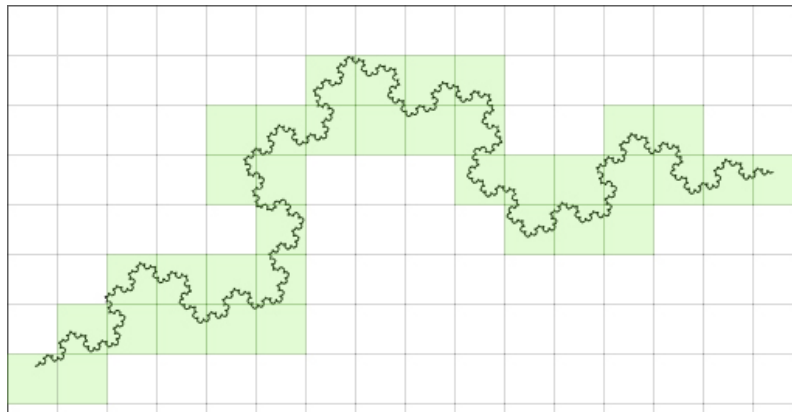
Hausdorffova dimenze je sice použitelná pro výpočet dimenze fraktálu, dokonce je přímo použita v jeho definici, ale kvůli její komplikovanosti se většinou upřednostňují jiné výpočty fraktální dimenze. Typicky se Hausdorffova dimenze používá pro měření multifraktálních¹ objektů.^[3, 13, 1]

4.6.4 Výpočty fraktální dimenze některých útvarů

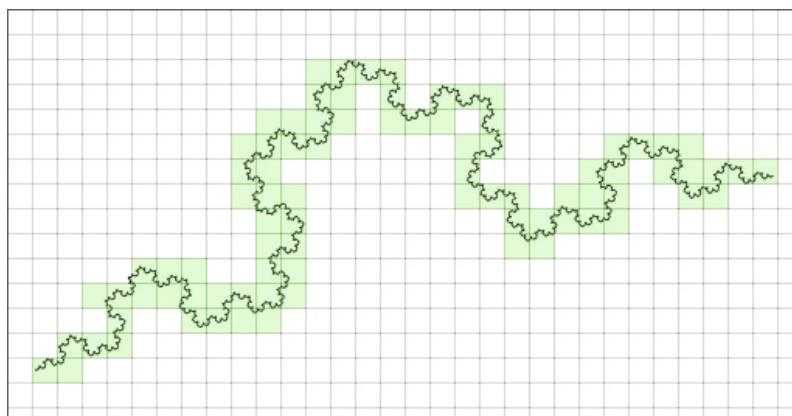
Uvedu několik příkladů výpočtu fraktální dimenze fraktálních i nefraktálních útvarů. Níže uvedená tabulka a obrázky obsahují parametry pro výpočty. Jednotlivé sloupce tabulky jsou: název objektu, topologická dimenze D , počet částí n , faktor změny f_s , soběpodobnostní dimenze D_s , mřížky g_1, g_2 dvou hustot pro určení krabicové dimenze ve tvaru „hustota \rightarrow počet boxů“ a krabicová dimenze D_k .

objekt	D	n	f_s	D_s	g_1	g_2	D_k
úsečka	1	n	$\frac{1}{n}$	1	$\frac{1}{4} \rightarrow 4$	$\frac{1}{8} \rightarrow 8$	1
čtverec	2	n^2	$\frac{1}{n^2}$	2	$\frac{1}{4} \rightarrow 16$	$\frac{1}{8} \rightarrow 64$	2
krychle	3	n^3	$\frac{1}{n^3}$	3	$\frac{1}{4} \rightarrow 64$	$\frac{1}{8} \rightarrow 512$	3
Cantorova množina	0	2^k	$\frac{1}{3^k}$	0.6309	-	-	-
Kochova křivka	1	4^k	$\frac{1}{3^k}$	1.2619	$\frac{1}{16} \rightarrow 36$	$\frac{1}{32} \rightarrow 84$	1.2224
Sierpiňského trojúhelník	1	3^k	$\frac{1}{2^k}$	1.585	-	-	-

¹Multifraktálem je nazvána kompozice různých fraktálů ^[3]



(a) $a = \frac{1}{16}, N(a) = 36$



(b) $a = \frac{1}{32}, N(a) = 84$

Obrázek 12: Krabicová dimenze Kochovy křivky - 5. iterace

Pozn.: Jelikož je Kochova křivka horizontálně symetrická, natočil jsem ji, aby dimenze lépe korespondovala s danou hustotou mřížky.

Úsečka:

$$D_s = \frac{\log n}{\log \frac{1}{f_s}} = \frac{\log n}{\log \frac{1}{\frac{1}{n}}} = \frac{\log n}{\log n} = 1$$

$$D_k = \log_2 \frac{N(2^{-(k+1)})}{N(2^{-k})} = \log_2 \frac{8}{4} = 1$$

Čtverec:

$$D_s = \frac{\log n}{\log \frac{1}{f_s}} = \frac{\log n^2}{\log \frac{1}{\frac{1}{n}}} = \frac{2 \cdot \log n}{\log n} = 2$$

$$D_k = \log_2 \frac{N(2^{-(k+1)})}{N(2^{-k})} = \log_2 \frac{64}{16} = 2$$

Krychle:

$$D_s = \frac{\log n}{\log \frac{1}{f_s}} = \frac{\log n^3}{\log \frac{1}{\frac{1}{n}}} = \frac{3 \cdot \log n}{\log n} = 3$$

$$D_k = \log_2 \frac{N(2^{-(k+1)})}{N(2^{-k})} = \log_2 \frac{512}{64} = 3$$

Cantorovo diskontinuum:

$$D_s = \frac{\log n}{\log \frac{1}{f_s}} = \frac{\log 2^k}{\log \frac{1}{\frac{1}{3^k}}} = \frac{k \cdot \log 2}{k \cdot \log 3} \approx 0.6309$$

Kochova křivka:

$$D_s = \frac{\log n}{\log \frac{1}{f_s}} = \frac{\log 4^k}{\log \frac{1}{\frac{1}{3^k}}} = \frac{k \cdot \log 4}{k \cdot \log 3} \approx 1.2619$$

$$D_k = \log_2 \frac{N(2^{-(k+1)})}{N(2^{-k})} = \log_2 \frac{84}{36} \approx 1.2224$$

Sierpiňského trojúhelník:

$$D_s = \frac{\log n}{\log \frac{1}{f_s}} = \frac{\log 3^k}{\log \frac{1}{\frac{1}{2^k}}} = \frac{k \cdot \log 3}{k \cdot \log 2} \approx 1.585$$

Ještě uvedu několik odhadů dimenzí přírodních objektů:

objekt	topologická dimenze	fraktální dimenze
Hranice ČR (viz výše)	1	1.2479
Pobřeží Velké Británie	1	1.25
Pobřeží Norska	1	1.52
Obvod 2D průmětu oblaku	1	1.33
Povrch hlávky kvěťáku	2	2.33
Povrch kuličky zmačkaného papíru	2	2.5
Povrch brokolice	2	2.66
Povrch lidského mozku	2	2.76
Povrch neerodovaných skal	2	2.2 – 2.3

V tabulce se nachází několik útvarů, které by se daly považovat za fraktály jako objekty v prostoru, což není tak úplně pravda. Je nutné oddělit např. povrch mozku člověka od mozku člověka jako tělesa v prostoru. Povrch mozku je z hlediska topologie dvourozměrný, a proto je fraktálem. Dle Mandelbrotovi definice, kterou uvedu dále v textu, je totiž jeho fraktální dimenze ostře větší, než dimenze topologická. Oproti tomu mozek jako těleso rozhodně nezabere „více místa“, než trojrozměrný prostor, proto nemůže být fraktálem. ^[1, 24]

5 Konstrukce fraktálů

Jelikož jsou fraktály poměrně složité objekty / obrazce, které se vyznačují vlastností soběpodobnosti nezávislé na změně měřítka (teoreticky až do nekonečna), modelují se zejména pomocí použití počítačů. Existuje několik způsobů pro generování fraktálů. Ty nejzákladnější a nejpoužívanější popíše dále v této kapitole.

5.1 Algoritmus IFS (deterministický, stochastický)

Systém iterovaných funkcí IFS, anglicky „iterated function system“ je algoritmus pro generování fraktálů pomocí tzv. afinních transformací. Využívá jedné z definic fraktálů, která říká, že se jedná o takový objekt, jehož geometrická struktura se opakuje v něm samém - soběpodobnost.

Afinní transformace jsou transformace v afinním prostoru, tedy prostoru, kde se pracuje s body mimo počátek soustavy souřadnic, tzn. v jakémsi obecném prostoru, jak jej intuitivně vnímáme. Tyto transformace jsou aplikovány na každý požadovaný bod. IFS používá několik operací - rotaci, změnu měřítka (zmenšování) a posun. Afinní transformace jsou dány tzv. transformačními maticemi. Každá operace má jinou matici. Díky zápisu matic v tzv. homogenních souřadnicích se dají transformace skládat vynásobením jednotlivých matic mezi sebou. Je nutné dodržet pořadí matic.

Rotace	Změna měřítka	Posunutí
$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \beta & 0 \\ \sin \alpha & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Poskládáním těchto matic ve správném pořadí, tedy rotace, změna měřítka a posunutí, dostaneme obecnou matici, která je využívána algoritmy IFS.

$$w(X) = w \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_x \cos \alpha & -s_y \sin \beta & 0 \\ s_x \sin \alpha & s_y \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \\ 1 \end{pmatrix} \quad (21)$$

X	...	výchozí bod o souřadnicích (x, y)
$w(X)$...	transformovaný bod X
α, β	...	úhel otočení osy x , resp. y
s_x, s_y	...	změna měřítka ve směru osy x , resp. y
t_x, t_y	...	posunutí po (neotočené) ose x , resp. y

Afinní transformace jsou lineární, což znamená, že transformací úsečky získáme opět úsečku. Pro použití v algoritmech IFS musí být tyto transformace navíc i kontrakcemi (kontraktivními zobrazeními), a tudíž se vzdálenost dvou bodů s vyššími iteracemi zkracuje $\Rightarrow |AB| > |w(A)w(B)|$.

Pro vygenerování fraktálního objektu algoritmem IFS je nutné aplikovat skupinu afinních transformací na danou množinu bodů. Budeme-li iterativně aplikovat transformace na sebe sama, tzn. v jedné iteraci transformujeme množinu bodů M na množinu bodů $w(M)$, a v iteraci následující pak aplikujeme tytéž transformace právě na množinu $w(M)$, získáme postupně fraktální strukturu.

Mějme množinu bodů M , na které aplikujeme skupinu N transformací w , pro IFS platí:

$$M_{n+1} = \bigcup_{j=1}^N w_j(M_n), n = 1, 2, \dots \quad (22)$$

Pomocí IFS lze generovat soběpodobné fraktály jak s přesnou soběpodobností, tak se statistickou soběpodobností. Budeme-li iterovat s totožnými transformačními maticemi, budeme-li zachovávat pravidelnost, získáme fraktál s přesnou soběpodobností. Tento algoritmus nazýváme deterministický, protože zde nefiguruje žádný prvek „náhody“. Oproti tomu, chceme-li získat fraktál se statistickou soběpodobností, použijeme algoritmus stochastický, ve kterém je nutné každé transformaci přiřadit pravděpodobnost, s jakou bude daná matice aplikována na aktuální množinu bodů. Takový IFS se nazývá „hierarchický IFS“ (HIFS). Pro HIFS pak platí rovnice 22, kde je nutné brát v úvahu pravděpodobnost p , a platí $w_j \approx p_j$.^[1, 13]

Množinu transformací pro algoritmus IFS zapisujeme pomocí tabulky, pro kterou platí následující úprava obecné transformační matice:

$$w(X) = w \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \\ 1 \end{pmatrix} \quad (23)$$

Uvedu tabulky pro některé fraktály:

Sierpiňského trojúhelník (obr. 18)

w	a	b	c	d	e	f	p
1	0.5	0	0	0.5	0.25	0.5	-
2	0.5	0	0	0.5	0	0	-
3	0.5	0	0	0.5	0.5	0	-

Jak je vidět z tabulky, je v případě Sierpiňského trojúhelníku vynechán parametr p , což znamená, že v každé iteraci jsou aplikovány všechny transformace pravidelně, je tedy použitý deterministický algoritmus, který generuje pravidelný fraktál. Pokud bych chtěl získat fraktál stochastický, musel bych nastavit pravděpodobnosti v posledním sloupci, např.:

Stochastický Sierpiňského trojúhelník

w	a	b	c	d	e	f	p
1	0.5	0	0	0.5	0	0.5	0.25
2	0.5	0	0	0.5	0.25	0	0.25
3	0.5	0	0	0.5	0.5	0.5	0.5

Kochova křivka (obr. 19)

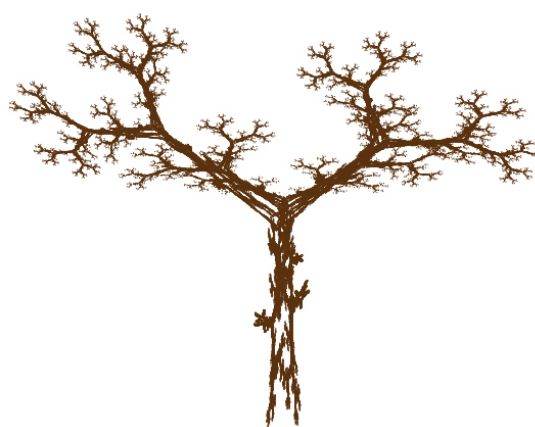
w	a	b	c	d	e	f	p
1	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	0	0	-
2	$\frac{1}{6}$	$-\frac{\sqrt{3}}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	0	-
3	$\frac{1}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{6}$	$-\frac{\sqrt{3}}{6}$	$\frac{1}{6}$	0.5	$\frac{\sqrt{3}}{6}$	-
4	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	-

IFS fraktál „strom“

w	a	b	c	d	e	f	p
1	0.195	-0.488	0.344	0.443	0.4431	0.2452	-
2	0.462	0.414	-0.252	0.361	0.2511	0.5692	-
3	-0.058	-0.07	0.453	-0.111	0.5976	0.0969	-
4	-0.035	0.07	-0.469	-0.022	0.4884	0.5069	-
5	-0.637	0	0	0.501	0.8562	0.2513	-



(a) 3. iterace



(b) 8. iterace

Obrázek 13: IFS fraktál „strom“

5.1.1 „Hra chaosu“

Existuje i další stochastický IFS algoritmus, který je známý pod názvem „hra chaosu“ (anglicky „chaos game“). Jeho princip popíše na generování Sierpiňského trojúhelníku:

1. hra začíná volbou tří hlavních vrcholů Sierpiňského trojúhelníku
2. náhodně se dovnitř trojúhelníku položí tzv. „jádro“ (startovní bod)
3. od tohoto bodu se bude iterovat, a v každé iteraci se náhodně zvolí 1 ze 3 vrcholů
4. přesně do $\frac{1}{2}$ vzdálenosti pozice jádra a zvoleného vrcholu umístím nový bod
5. nový bod se stává jádrem
6. pokračuji krokem iterace, tedy bodem 3 (provádí se např. 50 000x)

Zdánlivě chaotický systém, který po velkém počtu iterací generuje fraktální strukturu. ^[1]

5.2 Časově únikový algoritmus (ETA)

„Časově únikový algoritmus“, anglicky Escape-Time algorithm (ETA), je „obarvovací“ algoritmus, užívaný ke generování fraktálních struktur. Je možné jej použít na vygenerování téměř jakéhokoli fraktálu, nejčastěji je však využíván na generování soběpříbuzných fraktálů, např. Juliových, či Mandelbrotovy množiny. Jedná se o iterační algoritmus založený na čísle, které určuje počet iterací nutných ke zjištění, zda určitý bod, resp. iteračně tvořená trajektorie, překročí předem danou hranici nebo ne. Body, které uniknou, pak směřují k nekonečnu.

Hranice je většinou kruhová oblast se středem v počátku o poloměru 2 \rightarrow tato hodnota je dána Mandelbrotovou množinou, dá se totiž ukázat, že je-li $|z| > 2$, pak je trajektorie divergentní a směřuje k nekonečnu. S touto hranicí budu dále počítat.

Na počítači (resp. obrazovce) simulujeme zobrazení komplexní roviny klasickým způsobem, reálná část je zanesena na osu x a imaginární část pak na osu y . V algoritmu se prochází pixel po pixelu, jejich souřadnice se převedou na odpovídající komplexní číslo, je provedena příslušná transformace a výsledné komplexní číslo se srovná s poloměrem kruhové oblasti. Je-li číslo mimo oblast, došlo k „úniku“, a není nutné dále pokračovat. Je-li číslo uvnitř oblasti, použije se toto číslo pro další iteraci. Opakování probíhá, dokud číslo nepřekročí hranici, nebo nedojde k dosažení maximálního počtu iterací. Neunikla-li trajektorie bodu z oblasti, je daný pixel obarvený jednou barvou, která tvoří vnitřek fraktálu. Unikla-li, je daný pixel obarven barvou v závislosti na počtu iterací nutných k úniku.

Výsledné obrazce bývají velmi působivé. Pod níže uvedeným algoritmem v C++ přiložím několik Juliových množin vytvořených pomocí ETA s různými kolorizacemi.^[1]

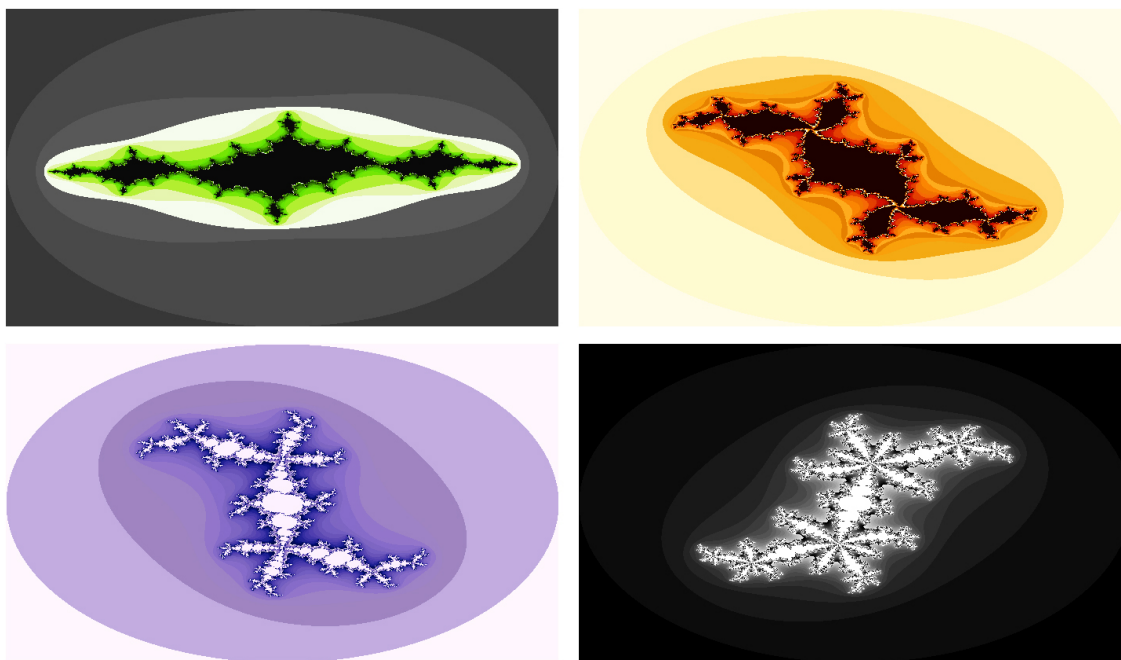
```
QVector<QRgb> buffer(canvas.width() * canvas.height());
for (qint32 row = 0; row < canvas.height(); row++) {
    for (qint32 col = 0; col < canvas.width(); col++) {
        // prevede pozici pixelu do komplexni roviny
        Complex z = this—>getMandelbrotPlanePixel(QPoint(col, row) + canvas.topLeft());

        qint32 iteration = 0;
        for (; ( iteration < this—>getCurrentIterationNumber()) && z.abs() < 4; iteration++) {
            z = (z * z) + this—>mandelbrotLocation;
        }

        // obarvi aktualni pixel
        buffer[(row * canvas.width()) + col] = this—>colorizePixel( iteration );
    }
}

// vykresli juliovu mnozinu na platno
painter—>drawImage(canvas, QImage(buffer.data));
```

Výpis 1: ETA pro generování Juliových množin v C++ s Qt



Obrázek 14: Ukázky Juliových množin tvořených algoritmem ETA

5.3 L-systémy

^[1, 6]Lindenmayerovy systémy, zkráceně L-systémy, vytvořil biolog Aristid Lindenmayer jako matematickou teorii pro popis vývoje rostlin. Původně systémy neobsahovaly dostatek detailů pro popis vyšších rostlin, ale byly určeny pouze pro popis jejich topologie, tzn. vztahů mezi sousedními buňkami. Geometrické aspekty těchto systémů byly ale za touto teorií, a ukázaly se jako schopné popsat i vyšší rostliny.

L-systémy nesou také název „paralelní přepisující se systémy“. Základní koncept teorie je přepisování. Jedná se o techniku, která rekurzivně nahrazuje své části pomocí tzv. přepisovacích pravidel. L-systémy jsou vlastně implementací příslušně naprogramovaných „konečných automatů“ a vychází z práce Noama Chomského na téma formálních gramatik. Základním rozdílem mezi Chomského gramatikami a L-systémy je metoda získávání jednotlivých výsledků. Zatímco Chomského gramatiky fungují sekvenčně, tzn. v každé iteraci je nahrazen jeden symbol, L-systémy jsou naopak aplikovány paralelním způsobem, tzn. v každé iteraci jsou nahrazeny všechny symboly aktuálního slova. Paralelní přepisování vychází z faktu, že při dělení buněk mnohobuněčných organismů dochází také k dělení více buněk v jednom okamžiku. Paralelní aplikace má zásadní dopad na formální vlastnosti přepisujícího se systému, např. existují jazyky, které jsou popsány

bezkontextovým L-systémem, tzv. „OL-systémem“, ale nikoliv bezkontextovou Chomského gramatikou.

Existuje více typů L-systémů, např. deterministické OL-systémy (tzv. DOL-systémy), závorkované L-systémy, stochastické L-systémy, kontextové L-systémy, paramterické L-systémy a další. Nejjednodušší z nich jsou DOL-systémy, ze kterých vychází „závorkované L-systémy“, jimiž se budu dále zabývat.

DOL-systém je definován jako uspořádaná čtveřice $\mathcal{L} = \langle \Sigma, S, \omega, P \rangle$, kde Σ je tzv. abeceda, množina symbolů jazyka určená k přepisování, S je množina konstant, např. velikost úhlu, $\omega \in \Sigma^+$ je tzv. „axiom“, což je výchozí neprázdné slovo, které bude přepisováno a $P \subset \Sigma \times \Sigma^*$ je množina přepisovacích pravidel. Přepisovací pravidlo $(a, \chi) \in P$ zapisujeme $a \rightarrow \chi$ a čteme „ a se přepisuje na χ “. Pro DOL-systém platí $\forall a \in \Sigma \exists$ právě jedno $\chi \in \Sigma^* : a \rightarrow \chi$.

Například systém

$$\begin{aligned}\Sigma &: A, B \\ S &: \emptyset \\ \omega &: A \\ P &: p_1 \approx A \rightarrow AB \\ & \quad p_2 \approx B \rightarrow A\end{aligned}$$

generuje postupně, v jednotlivých iteracích následující data:

$$A \xrightarrow{1.iterace} AB \xrightarrow{2.iterace} ABA \xrightarrow{3.iterace} ABAAB \xrightarrow{4.iterace} \dots,$$

kde je v každé iteraci přepsáno vždy celé slovo, tzn. např. v 2. iteraci je ze slova AB získáno ABA přepsáním $A \rightarrow AB$ podle p_1 a $B \rightarrow A$ podle p_2 .

Grafická reprezentace L-systémů vychází z tzv. „želví grafiky“. Základní myšlenkou grafiky generované želvou je nemožnost jejího couvání. Želva se pohybuje jen vpřed a umí se otáčet. Stav želvy je tedy dán trojicí (x, y, α) , kde (x, y) jsou souřadnice pozice želvy a úhel α , nazývaný hlava, určuje směr, kterým je želva natočená. Želva přijímá „příkazy“ definované krokem d a změnou natočení δ .

Abeceda L-systému se běžně definuje jako $\Sigma = \{F, X, +, -, [,]\}$ a množina konstant bývá jednoprvková a nese informaci o úhlu $S = \{\delta\}$. Významy jednotlivých prvků abecedy jsou:

- F, X ... pohyb dopředu o jeden krok
+ ... otočení doleva (proti směru hodinových ručiček) o úhel δ
- ... otočení doprava (po směru hodinových ručiček) o úhel δ
[... symbol pro větvení - paměťový prvek sloužící k uložení informace o pozici a úhlu natočení „želvy“, příp. dalších atributů (ukládá se na zásobník)
] ... symbol sloužící k vyvolání informací ze zásobníku a návrat do větvicího bodu

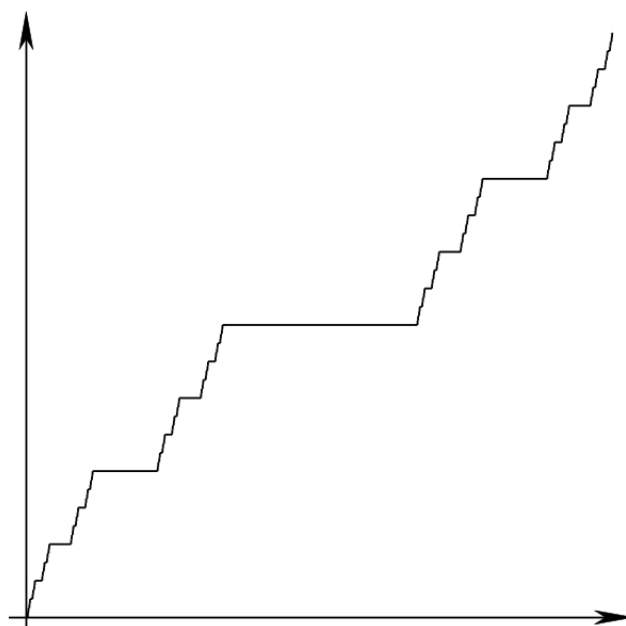


Obrázek 15: Větvičky generované L-systémem ve 3D^[51]

6 Fraktály

Existuje několik definicí pojmu fraktál, ale ani jedna není matematicky přesná. Nejpřesnější definice je však stále ta, kterou formuloval matematik Benoit B. Mandelbrot: „*Fraktál je množina, jejíž Hausdorffova-Besicovitchova dimenze je ostře větší, než její topologická dimenze.*“

Jak jsem ukázal dříve na několika příkladech, např. úsečka, čtverec či krychle fraktály nejsou, protože jejich topologická dimenze je vždy rovna jejich fraktální dimenzi. Fraktálem jsou např. Cantorova množina, jejíž dimenze je $0.6309 > 0$, Kochova křivka s dimenzí $1.2619 > 1$, či Sierpiňského trojúhelník, který má dimenzi $1.585 > 1$. Existují ale i výjimky, které jsou fraktálem, a přesto pro ně neplatí Mandelbrotova definice. Jedná se např. o tzv. Ďáblovo schodiště, křivku, resp. graf schodovité funkce, generované dle Catorovy množiny na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$. V bodech Cantorova diskontinua jsou jednotlivé „schody“. Délka této křivky je rovna 2, a jelikož křivky konečné délky mají Hausdorffovu-Besicovitchovu dimenzi rovnu 1, je její fraktální dimenze rovna topologické.^[7, 2]



Obrázek 16: Ďáblovo schodiště^[52]

Dále v této sekci představím několik známých fraktálů.

6.1 Klasické fraktály

Následující tři fraktály bych zařadil do jedné skupiny nikoliv kvůli tomu, že by měly mnoho společných vlastností, ale kvůli tomu, že se jedná o nejstarší a nejprozkoumanější fraktály vůbec. Na těchto fraktálech bývá fraktální geometrie vysvětlována a prezentována. Nejčastěji jsou generované pomocí jednoduchých IFS.

6.1.1 Cantorovo diskontinuum

Cantorovo diskontinuum, jiným názvem Cantorova množina, byla publikována matematikem G. Cantorem roku 1883. Jedná se o množinu se zajímavými matematickými vlastnostmi. Konstrukce Cantorova diskontinua je velmi jednoduchá. Množina je definována na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ a je konstruována rekurzivním vynecháváním 2. třetiny intervalu z předchozí iterace. Tzn.:

$$\langle 0, 1 \rangle \xrightarrow{1.iterace} \left\langle 0, \frac{1}{3} \right\rangle \cup \left\langle \frac{2}{3}, 1 \right\rangle \xrightarrow{2.iterace} \left\langle 0, \frac{1}{9} \right\rangle, \left\langle \frac{2}{9}, \frac{3}{9} \right\rangle, \left\langle \frac{6}{9}, \frac{7}{9} \right\rangle, \left\langle \frac{8}{9}, 1 \right\rangle \xrightarrow{3.iterace} \dots,$$

Tato konstrukce odpovídá IFS o dvou funkcích jedné proměnné $x \in \langle 0, 1 \rangle$:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \frac{x}{3}, \\ f_2(x) &= \frac{x+2}{3} \end{aligned} \tag{24}$$

Platí tedy $f_{1,2} : \langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$ a Cantorova množina C je pak

$$C = f_1(C) \cup f_2(C), \tag{25}$$

tzn. že Cantorovo diskontinuum tvoří množina bodů, která zůstane po nekonečně mnoha iteracích.

Zde se dostávám k první zajímavé vlastnosti této množiny. Lze ukázat, že začneme-li iterovat ve kterémkoliv bodě Cantorova diskontinua, po libovolném množství iterací se budeme opět nacházet v bodech C . Pomyslná trajektorie definována jednotlivými průchody tedy zůstane v C . Naopak, začneme-li v kterémkoliv jiném bodě, trajektorie bude okamžitě unikat pryč.

Dalšími zajímavými vlastnostmi je, že Cantorova množina je nespočetná (stejně jako celá reálná osa), nemá izolované body a je uzavřená. Z hlediska topologie je tedy kompaktní a navíc i perfektní. Dále diskontinuum neobsahuje žádnou úsečku a její topologická dimenze je 0.^[1]

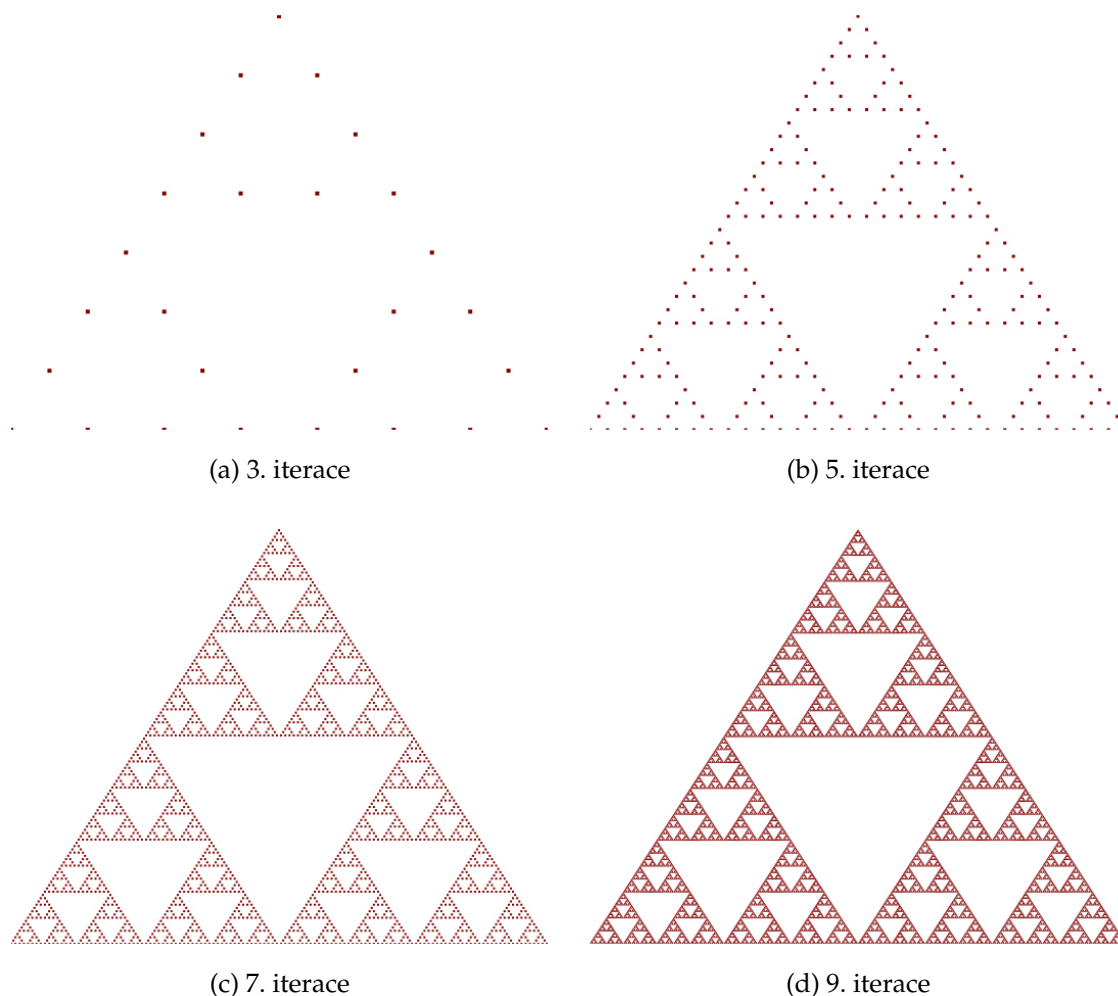


Obrázek 17: Několik iterací Cantorova diskontinua

6.1.2 Sierpiňského trojúhelník

Druhý fraktál, který chci představit, publikoval roku 1916 W. Sierpiński. Jeho konstrukce je opět velmi jednoduchá. Celý iterační proces vychází z „vyplněného“ trojúhelníka v ploše (obvykle se jedná o rovnoramenný trojúhelník). V každé iteraci jsou pak pomocí spojení středů všech stran vytvořeny čtyři kongruentní trojúhelníky, z nichž prostřední je „odstraněn“. V další iteraci tedy zůstanou tři trojúhelníky přilehlé k jednotlivým vrcholům původního. V každém z nich se proces dělení a odstranění opakuje. Sierpiňského trojúhelník bývá generován jak rekurzivním voláním tohoto procesu, tak deterministickým IFS, který jsem uvedl v sekci o algoritmu IFS. Sierpiňského trojúhelník je množina bodů, která zůstane po „nekonečně“ mnoha iteracích uvedeného procesu.

Existují různé variace na Sierpiňského trojúhelník, nejznámější z nich je asi Sierpiňského koberec, což je obdobný úkaz, kde je ale výchozím útvarem čtverec, který je v každé iteraci rozdělen na 9 částí (3×3) a odstraněn je prostřední čtverec. Další variací je tzv. „Mengerova houba“, která je zobecněním Sierpiňského koberce do trojrozměrného prostoru. Existují i další variace, které jsou k vidění v reálném světě, v umění, např. vzor na kazatelně katedrály v Ravelle v jižní Itálii ze 12. století, či fraktální vzor v basilice San Clemente v Itálii.^[1, 3]



Obrázek 18: Sierpiňského trojúhelník

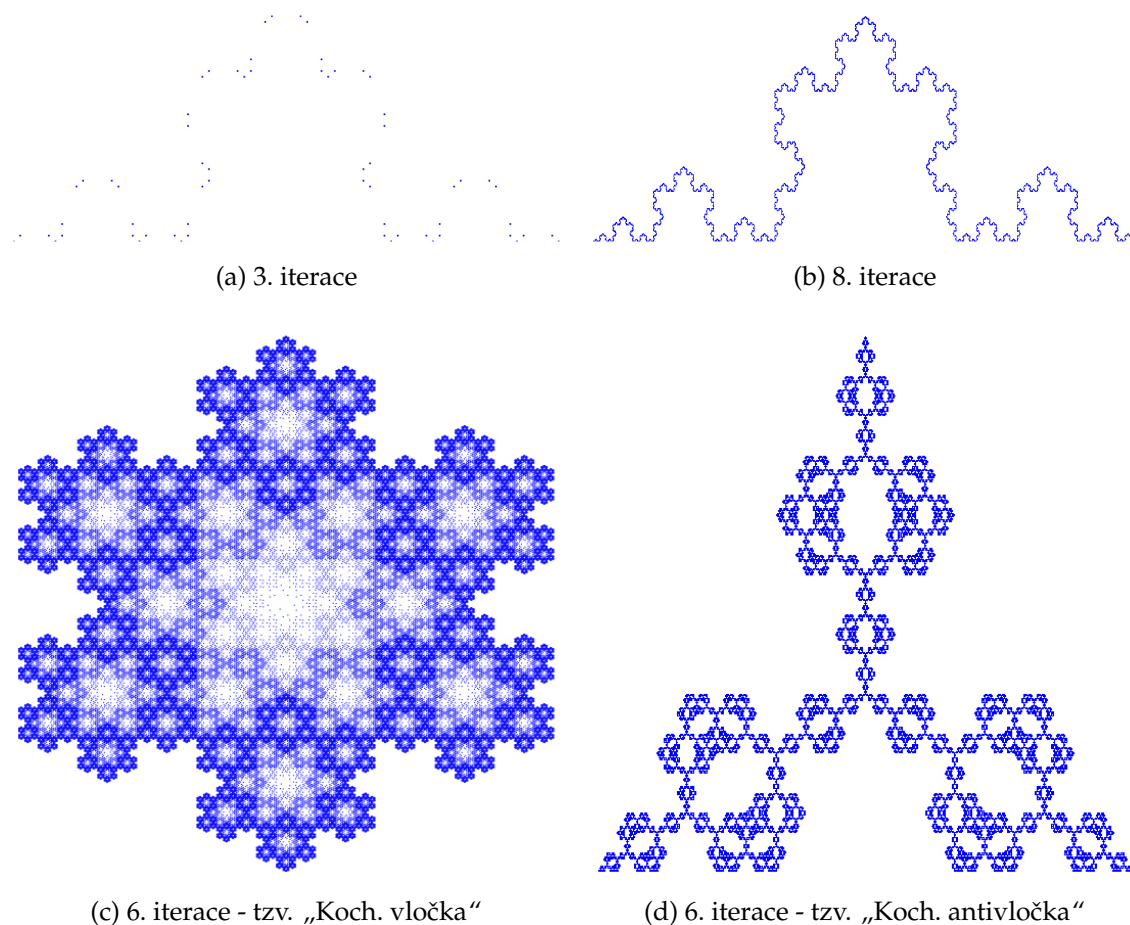
6.1.3 Kochova křivka

Posledním klasickým fraktálem z mého výčtu je Kochova křivka, kterou popsal švédský matematik Helge von Koch roku 1904. Její konstrukce je odlišná od předchozích dvou ve způsobu generování. Při konstrukci již nebývá použito jednoduchých afinních transformací na mateřském útvaru, přesto je však možné křivku generovat pomocí IFS se čtyřmi funkcemi v systému. Další možností pro generování je využití L-systému. Křivka je generována pomocí dvou základních útvarů, iniciátoru (základní tvar) a generátoru (kolekce zmenšených kopií iniciátoru „uspořádaných“ do určitého tvaru). Nejčastěji bývá iniciátorem úsečka a generátorem rovnostranný trojúhelník o délce strany $\frac{1}{3}$ původní úsečky. Trojúhelník bez základny nahradí v každé iteraci prostřední třetinu úsečky. Ná-

sledně se každá vzniklá úsečka stává iniciátorem a rekurzivně se aplikuje popsané pravidlo.

Kochova křivka je spíše známá v její modifikaci jako Kochova vločka, což jsou vlastně tři Kochovy křivky „natočené do trojúhelníku“, tzn. že iniciátorem je trojúhelník.

Kromě toho, že je Kochova křivka fraktálem, je také v celém rozsahu spojitá, ale v žádném bodě nemá konečnou derivaci, protože každý bod na křivce je po „nekonečně mnoha“ iteracích průnikem dvou „nekonečně malých“ úseček tvořících strany „nekonečně malého“ trojúhelníka. Celá křivka je nekonečně dlouhá, ale jak je vidět na obrázku [19] zabírá jen omezenou část plochy.



Obrázek 19: Kochova křivka, Kochovy vločka a Kochova antivločka

6.2 Juliova množina

Okolo 20. let 20. století zkoumali vědci P. Fatou a G. Julia zajímavé množiny bodů definovaných v Gaussově (komplexní) rovině.

Mějme jednoduchou analytickou funkci, polynom 2. stupně $f(z) = z^2 + c$; $z, c \in \mathbb{C}$, kde z je proměnná a c je pevně zvolená konstanta (nejlépe z definičního oboru Mandelbrotovy množiny). Budeme-li iteračně tvořit posloupnost definovanou vztahem

$$z_{n+1} = z_n^2 + c, \quad (26)$$

a vyjdeme-li ze zvolené počáteční hodnoty z_0 (aktuální pixel převedený do „prostoru Mandelbrotovy množiny“), první čtyři prvky množiny tedy budou

$$z_0 \rightarrow z_0^2 + c \rightarrow (z_0^2 + c)^2 + c \rightarrow ((z_0^2 + c)^2 + c)^2 + c \rightarrow \dots,$$

pak budeme pozorovat dva typy trajektorií tvořených touto iterací. Prvním typem je neomezená (divergující, neohraničená) trajektorie, která z daného bodu uniká do nekonečna, a druhým pak trajektorie omezená (ohraničená), která je buď cyklická (periodická) nebo konvergující k nějakému (pevnému) bodu. Omezené trajektorii, neboli ohraničené množině bodů, se říká množina „věžňů“, protože existuje kruh okolo z_0 , jehož hranici posloupnost nikdy nepřekročí. Neomezené trajektorii, neboli neohraničené množině bodů, se také říká množina „uprchlíků“, protože ji „neuvězní“ žádný kruh umístěný okolo startovního bodu.

Tyto množiny jsou vzájemně komplementární. Množina věžňů je jakási „vyplněná Juliova množina“ a množina uprchlíků je tzv. Fatouova množina, nebo také „Fatouův prach“. Hranice mezi „vyplněnou Juliovou množinou“ a Fatouovou množinou je Juliova množina. Vzhledem k možnosti volby jakéhokoliv c je zřejmé, že Juliových množin je nekonečné množství. Pro velká c ale trajektorie uniká příliš rychle, proto je rozumné zvolit nějaké kritérium úniku. Tímto kritériem je číslo 2. Překročí-li trajektorie kružnici o poloměru 2 se středem v počátku, pak pozorovaný bod patří do Fatouovy množiny a naopak. Může se ale stát, že vyzkoušený počet iterací není k rozpoznání dostačující. Pro 100% jistotu je nutné provést ∞ mnoho iterací, proto čím je vyzkoušeno více iterací, tím přesnější je tvar (obraz) Juliovy množiny (to například ovlivňuje změnu měřítka Juliovy množiny - čím více chceme Juliovu množinu přiblížit, tím více iterací je nutné spočítat).

Existuje tzv. „kritický“ bod Juliových množin, který je definovaný nulovou derivací

$$P'(z) = 0. \quad (27)$$

Tento bod definuje tři „stavy“ Juliových množin:

1. souvislá

Je-li trajektorie obsahující kritický bod ohraničená.

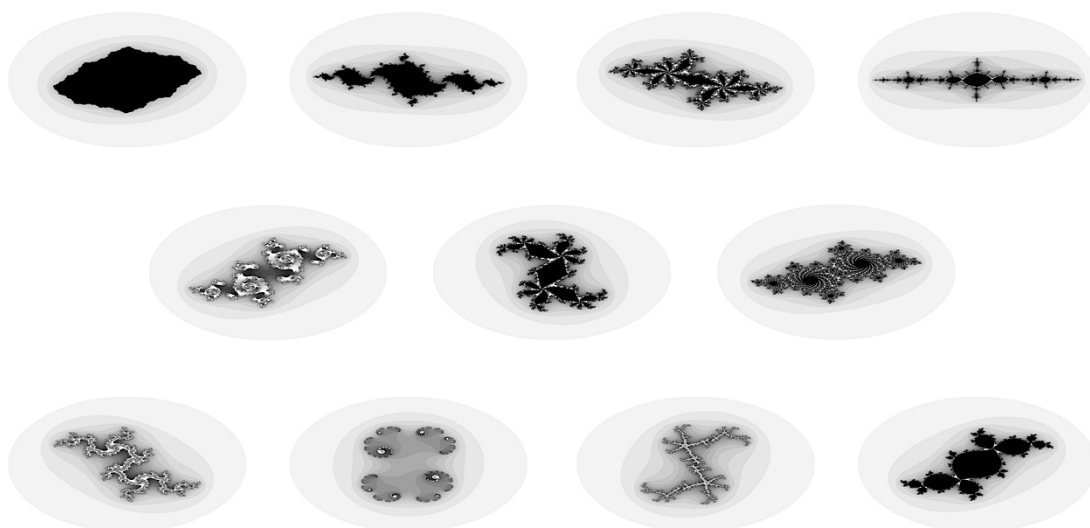
2. nesouvislá

Existují-li minimálně dva kritické body, kdy jeden z nich je v trajektorii ohraničené a druhý v neohraničené.

3. totálně nesouvislá

Je-li trajektorie obsahující kritický bod neohraničená.

Jelikož je hranice mezi Fatouovými množinami a „vyplněnými“ Juliovými množinami křivka, je její topologická dimenze rovna 1, zatímco její fraktální dimenze je rovna 2, a tudíž Juliovy množiny jsou opravdu fraktály.^[1, 3]



Obrázek 20: Juliovy množiny

Zdrojový kód algoritmu pro generování Juliových množin je uveden v sekci s popisem algoritmu ETA.

6.3 Mandelbrotova množina

V druhé polovině 70. let 20. století zkoumal B. Mandelbrot práci P. Fatoua a G. Julia. Snažil se najít nějakou klasifikaci chování funkcí definujících Juliovy množiny, udělat

v nich řád. Tento výzkum vedl přímo k nalezení tzv. „Mandelbrotovy množiny“, která definuje celé univerzum Juliových množin.

Mandelbrotova množina je jednoznačně nejpopulárnějším fraktálem. Je jakýmsi „symbolem“ celé fraktální geometrie. Mandelbrotův experiment z r. 1979 byl už vyzkoušen mnoha amatérskými vědci po celém světě. Všichni totiž chtějí prozkoumat nekonečný „prostor“ překrásných grafických útvarů, jež je možné modelovat na počítačích.

Jak jsem uvedl u Juliových množin J_c , pro každou posloupnost 26 existuje unikátní množina „vězňů“ P_c a k ní komplementární množina „uprchlíků“. Mandelbrot si uvědomoval, že klíčem k pokročení ve výzkumu Juliových množin je fakt, že pro jakékoliv c jsou odpovídající J_c a P_c buď souvislé nebo totálně nesouvislé. Kdyby tedy existoval nějaký „katalog“ Juliových množin, měl by pravděpodobně tyto dvě části. Roku 1979 Mandelbrot provedl experiment, ve kterém se pokusil vykreslit obě skupiny na počítači. Zaměřil se na celou škálu parametru c s tím, že v každé iteraci vycházel z komplexní 0, tedy $z_0 = 0$. Tento experiment přímo vedl k nalezení Mandelbrotovy množiny, která by se dala definovat dvěma způsoby:

$$M = \{c \in \mathbb{C} \mid J_c \text{ je souvislá}\}, \quad (28)$$

což vlastně znamená, že je-li c uvnitř M , příslušná J_c je souvislá, a je-li c mimo M , je příslušná J_c totálně nesouvislá. K druhé definici Mandelbrotovy množiny lze využít ekvivalence: P_c je souvislá \Leftrightarrow trajektorie tvořená posloupnostmi 26 je ohraničená, tzn.:

$$M = \{c \in \mathbb{C} \mid 26 \text{ je ohraničená}\}. \quad (29)$$

Právě této definice Mandelbrot využil při vykreslování bodů uvnitř M , které vybarvoval černě.

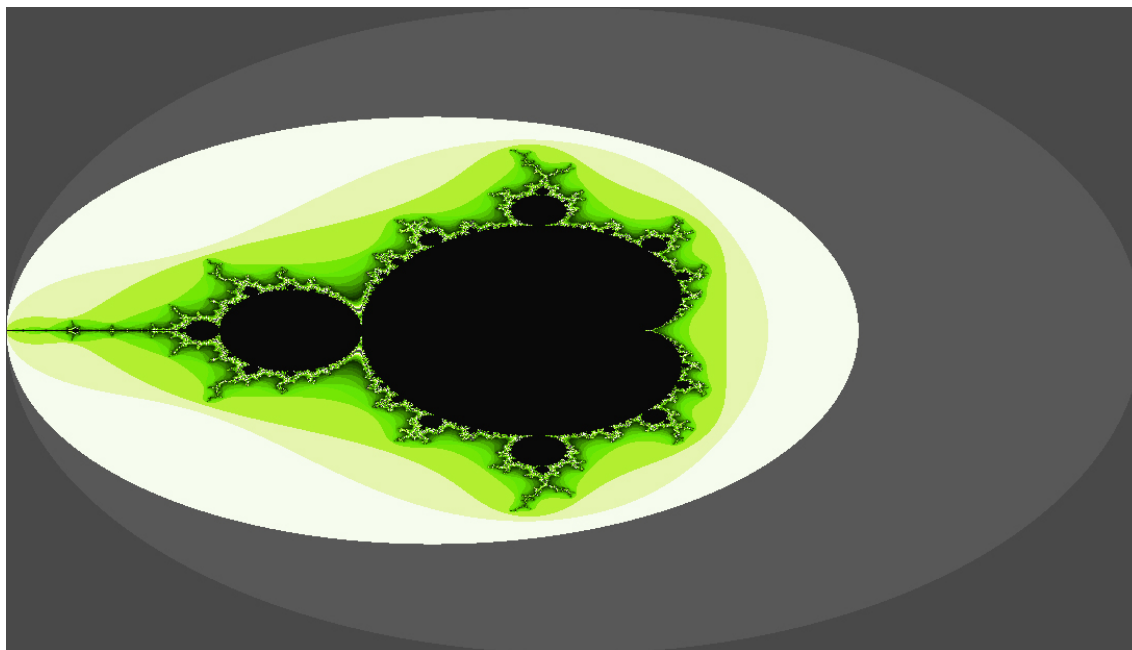
Postup výpočtu je velmi podobný generování Juliových množin. Zamění se zde funkce parametrů $c \in \mathbb{C}$ a $z_0 \in \mathbb{C}$. Narozdíl od Juliových množin, kde z_0 odpovídá pozici počítaného pixelu a c je libovolný, je Mandelbrotova množina generována testováním parametru c , který je dán pozicí pixelu a $z_0 = 0$. Je zřejmé, že Juliových množin existuje nekonečně mnoho, a Mandelbrotova množina je právě jedna. M je tudíž tvořena stejnou posloupností, jako Juliovy množiny 26 s parametry, které jsem uvedl v předchozí větě.

Pro Mandelbrotovu množinu platí následující vlastnosti:

- Stejně jako pro Juliovy množiny platí, že celá Mandelbrotova množina leží v kruhu se středem v bodě $[0, 0]$ a poloměrem 2, protože pro $|c| > 2$ trajektorie diverguje.
- Do Mandelbrotovy množiny patří každé c z intervalu $[-2; 0.25]$ na reálné ose.
- Mandelbrotova množina je souvislá a kompaktní (tedy omezená a uzavřená).

- Je to množina, která obsahuje ∞ kopií sebe sama s tím, že kopie nejsou soběpodobné, ale soběpříbuzné (nejsou invariantní vůči žádné lineární transformaci).
- Má „nekonečně“ rozdílné detaily, ale přesto je snadno implementovatelná na PC, neboť J_c je souvislá $\Leftrightarrow 26$ je omezená.
- Mandelbrotova množina ovlivňuje topologickou dimenzi $D(J_c)$ Juliových množin tak, že je-li c uvnitř M , má J_c dimenzi rovnu 2, je-li na hranici, $D(J_c) = 1$ a je-li c mimo M , pak $D(J_c) = 0$.
- Systém všech J_c je citlivý vůči počátečním podmínkám (což je obdobná vlastnost s tzv. „Motýlím efektem“), a jeho dynamika je tedy „chaotická“ (poukazuje na tzv. „deterministický chaos“).
- Hranice Mandelbrotovy množiny je „nekonečně“ tenká, jedná se o křivku, jejíž topologická dimenze $D = 1$. Jelikož její Hausdorffova dimenze je rovna 2, jde o fraktál, a to s maximální možnou členitostí, stejně jako u Juliových množin.
- Plocha Mandelbrotovy množiny je cca $1.506591856 \pm 2.54 \times 10^{-8}$.²

[7, 4, 3]



Obrázek 21: Mandelbrotova množina

²Viz web: <http://www.mrob.com/pub/muency/areaofthemandelbrotset.html>

Algoritmus pro generování Mandelbrotovy množiny je obdobný algoritmu pro generování Juliových množin s úpravou popsanou výše.

```
QVector<QRgb> buffer(canvas.width() * canvas.height());
for (qint32 row = 0; row < canvas.height(); row++) {
    for (qint32 col = 0; col < canvas.width(); col++) {
        Complex z(0, 0);

        // prevede pozici pixelu do komplexni roviny
        Complex c = this—>getMandelbrotPlanePixel(QPoint(col, row) + target.topLeft());

        qint32 iteration = 0;
        for (; ( iteration < this—>getCurrentIterationNumber()) && z.abs() < 4; iteration++) {
            z = (z * z) + c;
        }

        // obarvi aktualni pixel
        buffer [(row * canvas.width()) + col] = this—>colorizePixel( iteration );
    }
}

// vykresli juliovu mnozinu na platno
painter—>drawImage(canvas, QImage(buffer.data));
```

Výpis 2: ETA pro generování Mandelbrotovy množiny v C++ s Qt

7 Inverzní fraktální problém

Inverzní fraktální problém (IFP) je inverzním procesem ke generování fraktálních útvarů. Generujeme-li fraktál pomocí systému iterovaných funkcí (IFS) využívajících afinní transformace, nebo pomocí únikového algoritmu (ETA), pak se pomocí procesu řešícího inverzní fraktální problém snažíme získat koeficienty afinních transformací, nebo příslušného ETA z fraktálního objektu. Jedná se o jakousi rekonstrukci fraktálu.

Vyřešení IFP je mimo jiné dále použitelné v praxi, např. při „počítačovém vidění“, kde se dá využít při popisu objektů atd. Existuje několik algoritmů pro řešení IFP, např. diferenciální evoluce (DE) a samoorganizující migrační algoritmus (SOMA). Oba tyto algoritmy patří mezi evoluční. Principem získání potřebných koeficientů je minimalizace účelové funkce. Po dosažení takto získaných koeficientů do příslušného IFS nebo ETA by mělo být možné vygenerování útvaru co nejpodobnějšího původnímu.

Fraktální útvar se položí na mřížku. Pomocí účelové funkce a kombinace různých parametrů se během evoluce získává součet políček, v nichž se původní fraktál liší s fraktálem po rekonstrukci. U jednoduchých fraktálů je v takovém případě možné hodnoty součtů zobrazit jako geometrickou plochu. Pak hledané koeficienty jsou souřadnice globálního minima této plochy.^[1]

8 Využití fraktální geometrie v oblasti informatických a technických věd

Spousta lidí v mém okolí se mě ptá: „a na co nám je neceločíselná dimenze? K čemu se dá vůbec tahle fraktální geometrie využít?“ Na první otázku jim vždycky odpovídám „a na co nám je celočíselná dimenze? Ano, celočíselná dimenze slouží např. k určení počtu os, které musíme zakreslit na papír, na obrazovku, či jiné výstupní zařízení při modelování objektu v daném prostoru, ale neceločíselná mi zase v mnoha případech přijde více odpovídající realitě, je přesnější, protože popisuje jemnější nuance, a dá se lépe využít např. ke srovnání velikosti dvou objektů.“ Na druhou otázku jim pak odpovídám to, co uvedu dále, fraktální geometrie opravdu není jen hříčka s hezkými obrázky a se zajímavými matematickými vlastnostmi. Je to i „nástroj“ využitelný v normálním světě. Některá využití popíši dále.

8.1 Simulace fyzikálních, či biologických procesů

První využití fraktální geometrie, které představím, je spíše vědeckého zaměření, i když ne nutně. Dá se využít pro matematický popis, resp. grafické modelování fyzikálních a biologických, či biochemických procesů, které mají fraktální, či chaotický charakter. Pomocí fraktální geometrie se dá simulovat např. náhodný pohyb mikroskopických částic v kapalném či plynném médiu, tzv. Brownův pohyb, jehož trajektorie je příkladem fraktálu se statistickou soběpodobností (s fraktální dimenzí 2). Dále se dá simulovat např. systém E. Lorenze pro modelování proudění atmosféry, fyzikální změny stavu různých materiálů či skupenství látek, a další.

Jak jsem uvedl v sekci L-systémů, fraktální geometrie se dá využít např. pro simulaci dělení buněk, komunikace mezi buňkami a růstu mnohobuněčných mikroorganismů. Dále také pro modelování struktury a dynamiky srdeční aktivity - simulace tlukotu srdce, či krevního tlaku. Pomocí fraktální geometrie se dá popsat struktura krevního řečiště, průběh EKG atd. Dá se také využít při modelování růstu a organizace tkání v těle, reakce struktur enzymů a jiných biochemických reakcí. [1, 6, 4, 25]

8.2 Fraktálová komprese digitálních obrazů

Fraktálová komprese patří mezi ztrátové komprese podobně, jako je tomu například u algoritmu JPEG. Existuje několik algoritmů fraktálové komprese založených na myšlenkách fraktální geometrie. Soběpodobnost hraje v těchto algoritmech zásadní roli. Z matematické roviny se využívají zejména transformace, při jejichž aplikaci jsou zachovány základní vlastnosti útvarů, tzn. rovnoběžnost, kolmost atd. Jedná se o afinní transformace v rovině, které jsou dány tzv. transformačními maticemi. První funkční algoritmus fraktálové komprese popsal r. 1989 A. Jacquin.

M. Barnsley definoval tzv. „kolážovou větu“, která matematicky popisuje fraktálové kódování obrazu na základě soběpodobnosti. Její význam by se dal slovně popsat asi takto:

„Mějme množinu I a soustavu transformací kontraktivního IFS. Atraktor tohoto IFS aproximuje I tím lépe, čím přesněji množinu I pokryjí její soběpodobné transformované obrazy. Množina takových obrazů se nazývá koláží původního obrazu.“

Fraktálová komprese má několik kroků:

1. Rozdělení obrazů na menší „bloky“.
2. Zjištění soběpodobnosti → nalezení různě velkých soběpodobných bloků.
3. Nalezení transformací větších bloků na menší.

Chceme-li komprimovat barevný obrázek, komprimují se většinou jednotlivé barevné složky obrazu zvlášť. Proto stačí pochopit kódování pouze pro monochromatický obraz, např. v odstínech šedi. Jelikož je takový obrázek vlastně reprezentován „maticí pixelů“ charakterizovaných jednou z 256 úrovní jasu ($0 \rightarrow$ černá, $255 \rightarrow$ bílá), využívá se při komprimaci i zpětné rekonstrukci, mimo soběpodobnosti, právě transformací jasu a kontrastu. Vzhledem k použitým IFS se jedná o iterační proces. K dostatečně kvalitní rekonstrukci obrazu postačí 8-10 iterací. Kvalita zpětné rekonstrukce je závislá na nalezení optimální koláže původního obrazu (jak je uvedeno v kolážové větě).

Fraktálové kódování je ztrátová kompresní metoda závislá na velikosti a počtu bloků. V určitých případech je možné dosáhnout vysokého kompresního poměru, dokonce až $1000 : 1$. Fraktálová komprese je časově asymetrický proces. Komprimace je několikanásobně náročnější a pomalejší, než zpětná rekonstrukce obrazu. Samozřejmě existují různé rychlé algoritmy s různými požadavky na hardware.^[1, 26]

8.3 Fraktální vidění - analýza snímaného obrazu: rozpoznávání obličeje, otisků prstů a dalších

Obdobnými technikami, které jsem uvedl v předchozí sekci 8.2, je možné na základě fraktálních vlastností, zejména pak na základě soběpodobnosti, rozpoznávat různé objekty a útvary z přírody. Pojem rozpoznávání obrazců pomocí počítače je obecně znám jako „počítačové vidění“. Jeho úkolem je analýza snímaného obrazu, rozdělení obrazu na dané objekty, jejich identifikace z požadovaných „úhlů pohledu“ atd. Počítačové vidění je možné rozdělit do několika kroků:

pořízení obrazu v digitální podobě

Snímání obrazu pomocí kamery, fotoaparátu, scanneru a jiných zařízení, které umí poskytnout digitální záznam. V procesu počítačového vidění je tento krok jedním z nejdůležitějších. Je to jakýsi základ. Čím kvalitnější záznam pošleme na vstup, tím přesnější výstup dostaneme.

úprava obrazu

Pro lepší rozklad obrazu a následující analýzu je důležité aplikovat několik filtrů, či opravných mechanismů, např. pro odstranění šumu, zostření obrazu, zvýraznění hran atd.

rozložení obrazu na jednotlivé objekty

Existuje několik metod pro rozklad obrazu na objekty, např. segmentace prahováním (zvýraznění některých objektů na základě určitých vlastností obrazu), segmentace narůstáním oblasti (využití určitých společných vlastností objektů, např. jasu), a další.

popis objektů

Rozložené objekty je nyní nutné popsat počítači. Např. určením barvy každého pixelu $\xrightarrow{\text{nevýhoda}}$ velké objemy dat, další možností je popsat hrany objektů pomocí vektorů $\xrightarrow{\text{nevýhoda}}$ nejednoznačnost. Oba tyto nedostatky je možné potlačit využitím fraktální geometrie. Pro popis objektů pomocí fraktální geometrie se použije jen malé množství koeficientů afinních transformací.

klasifikace objektů

Ke klasifikaci objektů se využívá právě „počítačový popis“ objektů. V případě využití fraktální geometrie je možné poslat koeficienty afinních transformací např. do neuronové sítě, kde se provede analýza a klasifikace objektů.

Příklady využití fraktální geometrie v počítačovém vidění

Práce [8] se zabývá rozpoznáváním obličeje člověka s využitím fraktální geometrie. Popisovaná metoda je založena na afinních transformacích tvořících kontraktivní IFS. Využívá metod uvedených v předchozí sekci^{8,2}, tedy transformaci jasu, kontrastu a bloků rozdělujících obrázků vhodným způsobem. Metoda je robustní, „odolná“ vůči změně měřítka obrázku, velikosti rámečku, natočení, určité úrovni šumu, výrazům tváře i mírnému rozostření obrázku, jak uvádí autoři. První aplikací počítačového vidění je tedy rozpoznání obličeje člověka a jeho identifikace v databázi fotografií.

V pracích [10, 11, 12] jsou popsány způsoby využití fraktální geometrie, díky kterým je možné s velmi dobrými výsledky rozpoznat otisky prstů člověka na základě poskytnutého snímku (dokonce nedokonalého, natočeného, nebo se změněným měřítkem). S využitím dalších metod, jako např. optimalizace pomocí částicových systémů, či využití neuronové sítě^[10], je možné dosáhnout dokonalejších výsledků, rychlejších algoritmů atd. Např. dle experimentů uvedených v knize [1], bylo využitím neuronové sítě dosaženo desetinásobného zrychlení zpracování, a navíc přesnějšího výsledku.

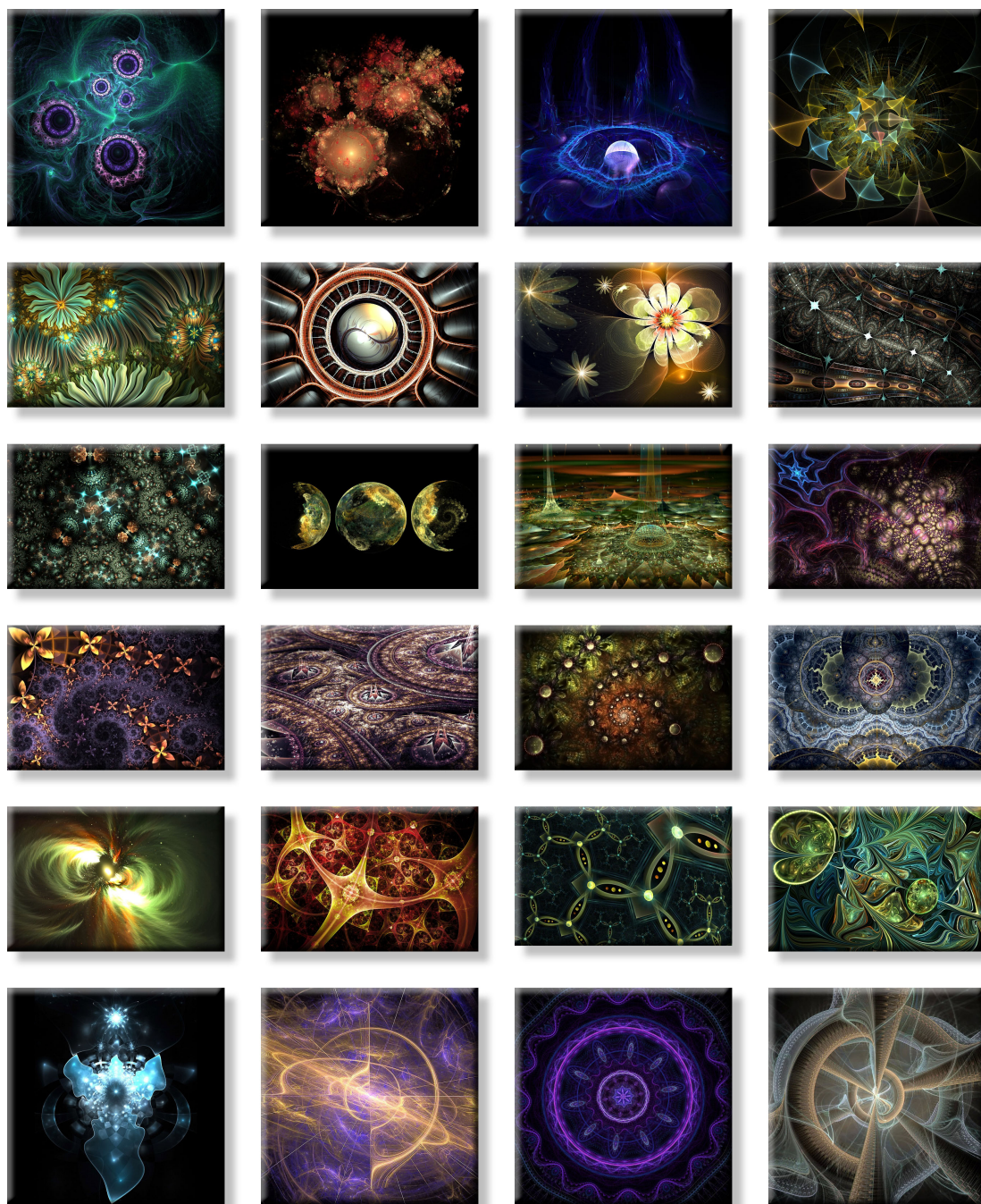
Hlavním důvodem zkoumání využití fraktální geometrie ve fraktálním vidění je odolnost vůči různým úrovním „znehodnocení“ zkoumaného snímku, a jednoduchý, zato kvalitní popis obrázku. Metoda má samozřejmě i nevýhody. Tou největší je výpočetní náročnost. Dle mého názoru, fraktální vidění v tomto smyslu nemá hranice. Zdaleka nekončí

u dvou možností aplikace. Přece jen je fraktální geometrie založena na soběpodobnosti a vyhledávám-li v databázi nějaký záznam z obrázku, výsledky si opravdu budou podobné.

8.4 Počítačová grafika, artware

Asi nejčastěji se fraktální geometrie využívá v počítačové grafice. Pomocí fraktální geometrie se modelují rostliny, lesy, celé krajiny, skály, pohoří, korály, mraky na nebi, hvězdokupy, galaxie, povrchy planet a spousta dalších útvarů reálného světa vykazujících fraktální vlastnosti. Takových modelů se využívá v počítačových hrách, či ve filmech - nikoliv hojně, ale dle dr. Martina J. Turnera^[27] bylo fraktálních technik využito např. při efektu teraformace (přeměna atmosféry a veškerých přírodních podmínek vesmírného tělesa na snesitelné lidským organizmem) pomocí zařízení Genesis ve filmu „Star Trek II: Khanův hněv“, nebo ve filmu „Star Wars: Epizoda VI - Návrat Jediho“, kde byla fraktální geometrie využita na vytvoření geografie povrchu měsíce, či vykreslení tvaru bitevní lodi „Hvězda smrti“.

Vzhledem k nekonečnému množství Juliových množin a dalších fraktálních struktur (grafických obrazců) se fraktální geometrie využívá v odvětví zvaném artware. Jedná se o „softwarové umění“, které skýtá překrásné obrazce nekonečně mnoha tvarů a barev.



Obrázek 22: Artware - ukázky fraktálů generovaných v programu Apophysis³

³Obrázky jsou z Feiny malé galerie fraktálů (uvedeno v citacích), s laskavým schválením majitelky webu.^[54]

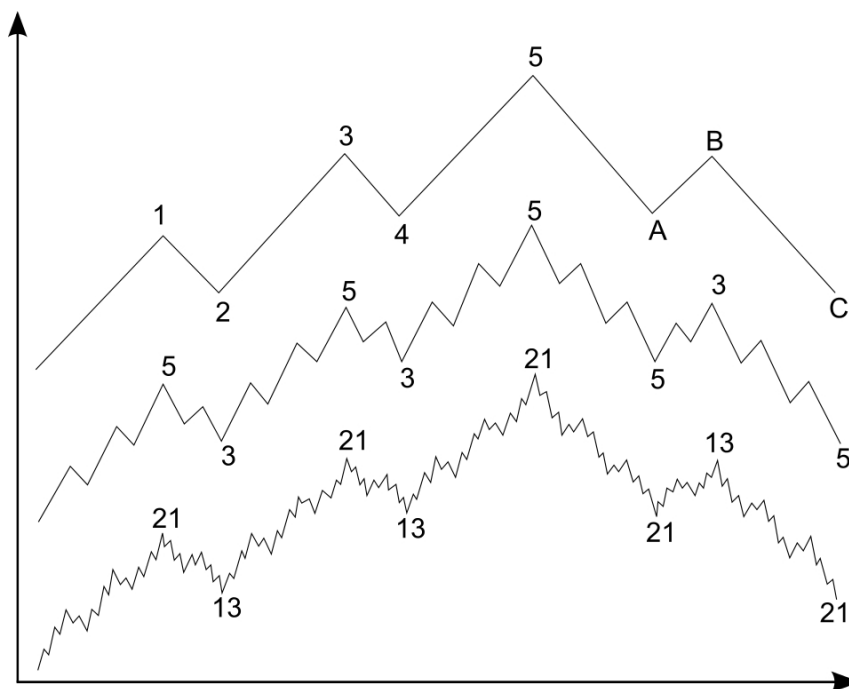
8.5 Analýza fluktuace cen na burzovním trhu

Posledním použitím fraktální geometrie, které bych chtěl uvést, je analýza pohybu cen na burzách cenných papírů. Jedná se o velmi aktuální téma z prostředí ekonomie a financí. Jde o metodu využití tzv. „Elliottových vln“, jež jsou vlastně fraktály, které tvoří trajektorie spojující jednotlivé výše cen. Elliottovým vlnám věnuji celou následující kapitolu.

9 Fraktální struktury v časových řadách

Časové řady jsou obecně srovnatelná data měřená v čase. Takové řady tvoří například pozorování návštěvnosti určité webové stránky, odečet elektřiny jedné domácnosti, či pohyb hodnoty cenných papírů na burze.

Okolo druhé poloviny 30. let 20. století účetní a obchodník R. N. Elliott objevil a popsal tzv. „Teorii vln“, obecně známou jako „Princip Elliottových vln“, nebo zkráceně „Elliottovy vlny“. Při dlouholetém pozorování dat na newyorské burze zjistil, že ceny mají tendenci se měnit ve vlnách. Velmi zjednodušeně řečeno, uvědomil si, že nejprve vždy přichází jakýsi „boom“, tzv. impulsní fáze, a po nasycení je nutný určitý „pád“, tzv. korekční fáze, pohyb proti aktuálnímu trendu vývoje - platí v obou směrech (vzrůst i pokles cen). Tento fakt vlastně odráží lidskou podstatu „přesycení“ a „diety“ (odmítání). U obchodníků / investorů je to optimistický a pesimistický přístup (strach) v investování. Tento vzor se neustále opakuje a „zanořuje“ v různých úrovních \Rightarrow soběpodobnost, což jde dobře vidět na obrázku 23. Jak si jistě každý dokáže představit (ukázáno v nejednom filmu, ve zprávách atd.), burza je na první pohled velice „chaotický proces“, jejíž vnitřní charakter má ale řád, který se neustále opakuje \rightarrow teorie chaosu. V druhé polovině 20. století, bylo na základě těchto vlastností zjištěno, že Elliottovy vlny nejsou nic jiného, než fraktály.



Obrázek 23: Elliottovy vlny - opakování vzoru impulsní i korekční fáze ^[53]

Analýza pomocí Elliottových vln je velmi uznávanou a používanou technikou pro odhad cenového vývoje. Použití Elliottových vln není omezeno jen k analýze fluktuace cen, ale i na jiné časové řady, v nichž se takový vzor objeví. Vezmu-li v úvahu pouze „ideální“ tvar Elliottových vln, dá se použití vysvětlit relativně jednoduše. Vyskytne-li se totiž v cenovém vývoji Elliottova vlna, lze předpokládat, že po pátém zlomu impulsní fáze, nebo po třetím zlomu korekční fáze se pohyb obrátí proti aktuálnímu trendu vývoje. Bohužel výskyt ideálních Elliottových vln je velmi vzácný, a většinou bývají nějakým způsobem deformovány. Přesto lze obdobnými úvahami vydedukovat aktuální stav a s poměrně dobrými výsledky odhadnout blízké budoucí změny.

Velkou roli v teorii vln hraje tzv. Fibonnaciho posloupnost, resp. poměry mezi jednotlivými čísly, protože bylo statisticky prokázáno, že nejčastější obraty jsou právě o takové poměry, které tvoří Fibonnaciho posloupnost.

Přestože Elliotovy vlny nejsou omezeny na analýzu pohybu burzy, budu je vysvětlovat právě na této „disciplíně“, kde se užívají nejvíce. Jak jsem uvedl výše, Elliottovy vlny se skládají ze dvou základních fází:

Impulsní fáze

má 5 zlomů (vln), značí se čísly 1-5, viz. 23.

- **1. vlna:**
Počátek „otáčení“ předchozího trendu, který je stále poměrně silný, nebývá příliš dlouhá ani rychlá.
- **2. vlna:**
Snaha obchodníků vrátit trend zpět do původního směru, tzv. „retracement“, vlna obvykle cenu nevrátí na méně než 61.8% (poměr tvořený Fibonnaciho posloupností). Za žádných okolností ale 2. vlna nesmí přesáhnout zpět počátek vlny 1.
- **3. vlna:**
Tato vlna bývá v impulsní fázi tou největší a nejsilnější, jedná se o jakési ujištění se, že trend je „naplno“ v opačném směru, ceny prudce rostou a analytici zvyšují ziskové odhady.
- **4. vlna:**
Nejčastěji se jedná o zřetelně korekční vlnu, která obvykle zabírá časově delší horizont a retracement obvykle dosahuje 38.2%, blíží se poslední vlna nového trendu a tato doba je vhodná pro zpětný odkup.
- **5. vlna:**
Vlna se obvykle vyznačuje velkým zvýšením nákupu obchodníků, protože trh je v tuhle chvíli nejoptimističtější. Jedná se o poslední část aktuálního směru trendu.

Korekční fáze

má 3 zlomy (vlny), značí se písmeny (a-c), viz. 23.

- **Vlna A:**
Jelikož došlo k nasycení až přesycení trhu, jedná se o první impuls pro změnu aktuálního trendu, počínající korekci předchozího růstu.
- **Vlna B:**
V této fázi se obchodníci, ve kterých stále přetrvává předchozí směr trendu, snaží o cenový návrat.
- **Vlna C:**
Poslední vlna korekční fáze, která je minimálně velikosti vlny A a může se dostat až na 161.8% její velikosti.

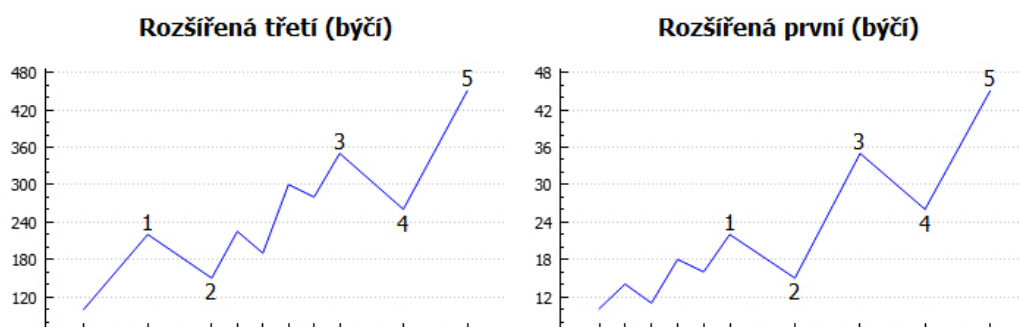
Vlny se většinou nevyskytují ve své „čisté“ podobě, nýbrž v několika modifikacích. Ty nejdůležitější stručně popíši dále.^[1, 28, 29, 30]

9.1 Impulsní vlny

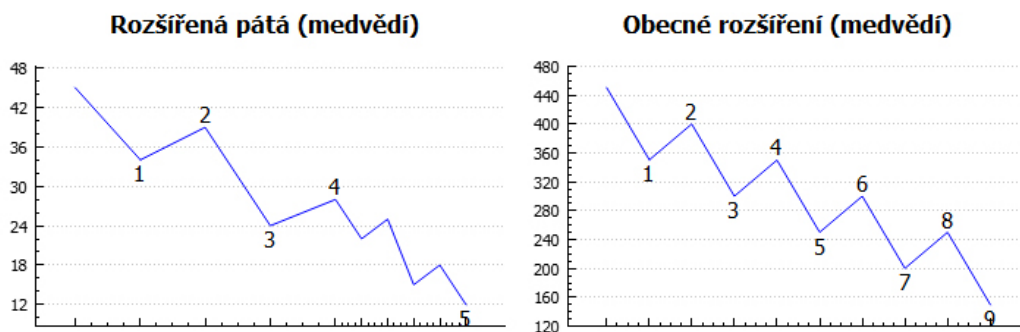
Impulsní vlny obecně určují aktuální směr pohybu ceny, tzv. „trend“. Tento „boom“, jak jsem jej nazval výše, může jít oběma směry, „nahoru“ v rostoucím tzv. „býčím“ trhu, i dolů v klesajícím tzv. „medvědí“ trhu. Impulsní vlny obsahují pět „podvln“, z nichž 1., 3. a 5. podvlna jsou opět vlny impulsní, které mají v základním tvaru podobné délky, a 2. a 4. podvlna jsou vlny korekční. Podvlny se značí číslicemi 1 - 5.

9.1.1 Rozšířená

Je-li trend příliš silný, nestává se, že by daná impulsní podvlna byla bez „klopýtnutí“, a často se tak jedna z 1., 3. nebo 5. podvlny nahradí impulsní vlnou nižší úrovně. Nejčastěji bývá rozšířená třetí podvlna. V případě, že není snadno rozpoznatelné, která podvlna je rozšířená, značí se celá vlna číslicemi 1 - 9 namísto 1 - 5. Oba typy, tedy pětiprvková i devítiprvková Elliottova vlna, mají stejné hlavní vlastnosti. Vzhledem k faktu, že Elliottovy vlny jsou fraktály, můžeme s jistotou říci, že se dále mohou rozšiřovat i vlny nižší úrovně, které byly vytvořeny předchozím rozšířením.^[1, 31]



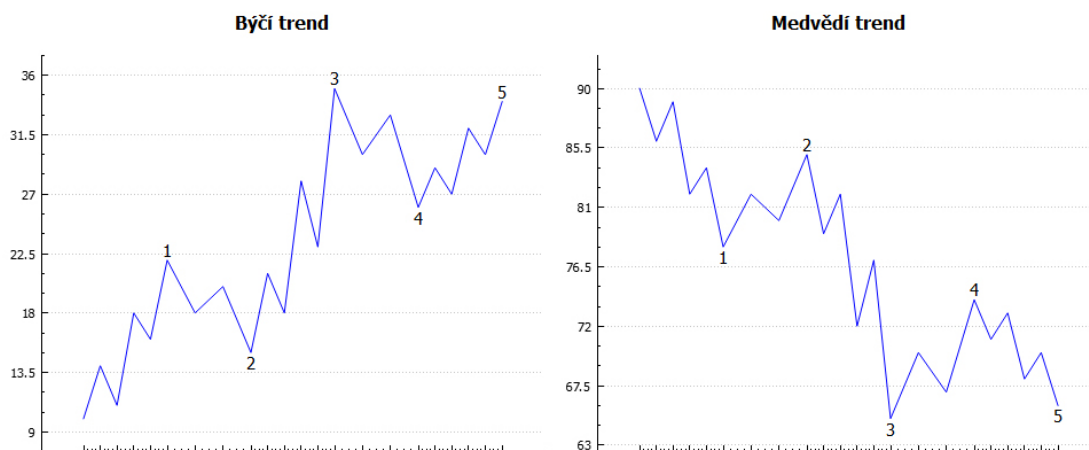
Obrázek 24: Ukázky různých rozšíření impulsní vlny: část 1



Obrázek 25: Ukázky různých rozšíření impulsní vlny: část .

9.1.2 Neúspěšná pátá

Je-li celý impuls v úplném tvaru, tedy 5-3-5-3-5 (první vlna je sama impulsem, pak následuje korekce, impuls, korekce a impuls), může někdy dojít k situaci, kdy pátá podvlna (tvořena impulsní podvlnou) nedosáhne vrcholu vlny třetí, která byla opravdu silná. Takovou situaci nazval R. N. Elliott „neúspěchem“. Stává se, že je tento vzor, resp. jeho pátá vlna, mylně identifikována jako první nového cyklu. Proto je důležité správně pozorovat celý vývoj a skutečně si ověřit, že se jedná o korektní tvar celé vlny. Pátá vlna musí být tvořena impulsem. Vzor neúspěšné páté bývá po změně směru trendu často rychle a kompletně vrácen zpět na původní pozici.^[1, 32, 37]



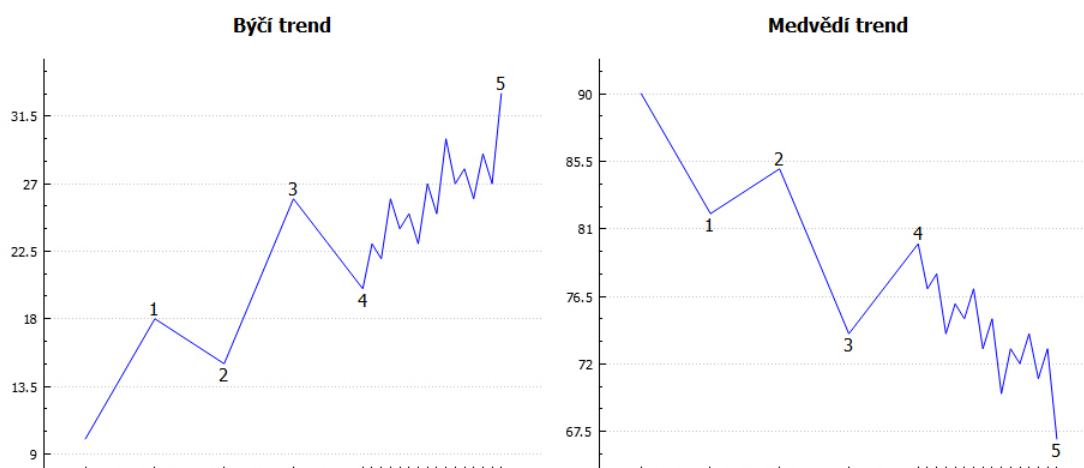
Obrázek 26: Neúspěšná pátá v býčím a medvědí trendu

9.1.3 Diagonální trojúhelník

Jedná se o speciální typ impulsní vlny, která zahrnuje některé charakteristiky korekčních vln. V Elliottových vlnách se objevuje pouze na určitých místech. Stejně jako ostatní impulsní vlny, jsou vždy pětistupňové (mají 5 podvln) a objevují se ve formacích 3-3-3-3-3 nebo 5-3-5-3-5. Diagonální trojúhelník má zužující se tendenci pohybu - spojením bodů tvořících jednotlivé vlny získáme dvě k sobě konvergující přímky.^[36]

9.1.4 Diagonální pátá

Rozšíření páté vlny několikrát za sebou do formace diagonálního trojúhelníka^{9.1.3}, tedy zužující se tendence pohybu, nazýváme „diagonální pátá“ (anglicky „ending diagonal“). K této deformaci dochází, když se pátá vlna pohybuje příliš rychle a příliš daleko. Po dokončení fáze zužování však dochází k prolomení trendu opačným směrem a to obvykle až k počátku trojúhelníka, tedy ke konci 4. vlny.^[1, 35]

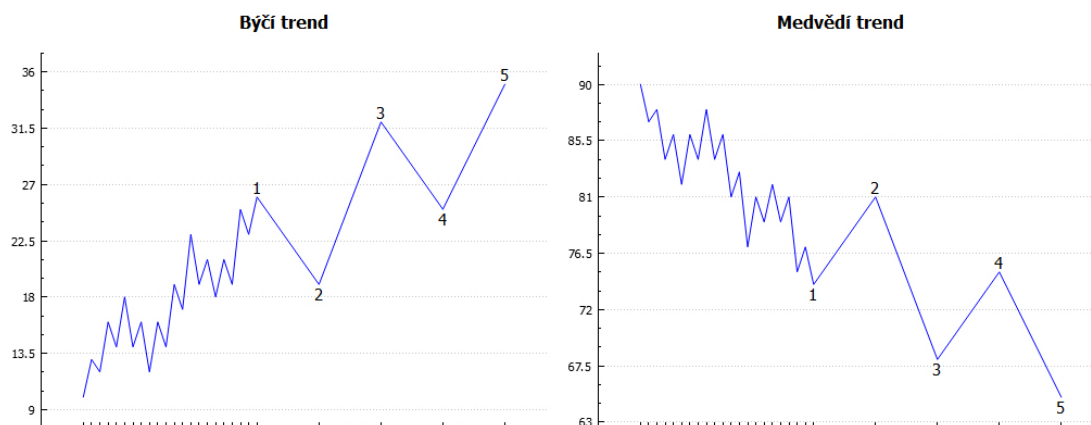


Obrázek 27: Diagonální pátá v býčím a medvědí trendu

9.1.5 Diagonální první

Tento vzor se v Elliottových vlnách nevyskytuje často, ale pozorován byl mnohokrát, takže jeho výskyt není možné přehlížet. Oproti diagonální páté, kdy je „diagonála“ (trojúhelník) tvořena formací 3-3-3-3-3, se „diagonální první“ (anglicky „leading diagonal“) vyskytuje spíše ve tvaru 5-3-5-3-5. Vzor bývá zaměňován s běžnějším vzorem - série prvních a druhých vln. Ve vzoru diagonální první bývá po první vlně hluboký retracement

a čtvrtá vlna překrývá první vlnu. Tuto modifikaci nepopsal Elliott, ale pánové A. J. Frost a Robert R. Prechter Jr., kteří tvrdí, že je ve smyslu Elliottových vln platná.^[33, 34]



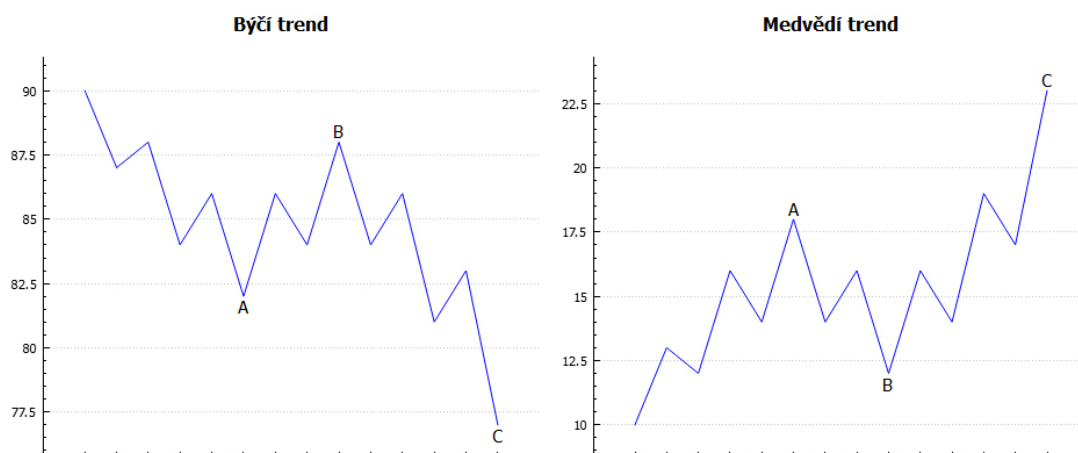
Obrázek 28: Diagonální první v byčím a medvědí trendu

9.2 Korekční vlny

Je-li trh „nasycen“, musí už vlivem základních vlastností člověka přijít jakási cenová korekce. Obchodníci se začínají strachovat o další nákup „nemůže to přeci růst do nekonečna“, postupně je ovládne pesimistický přístup a trh se začne obracet proti aktuálnímu trendu. Této fázi se říká „korekční vlny“. Mívají složitější strukturu, než impulsy a delší dobu trvání. Dost často „putují do strany“. Jejich podvlny značíme písmeny a - c. Stejně jako u vln impulsních, i zde existuje několik variací, z nichž nejpodstatnější uvedu dále.

9.2.1 Cik-cak

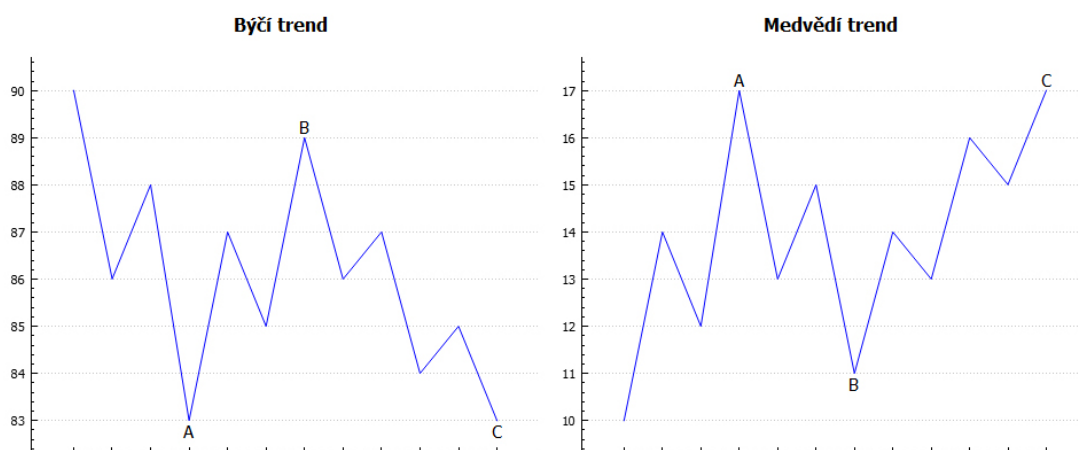
Prvním vzorem korekčních vln je tzv. „Cik-cak“, který se vyskytuje ve formaci 5-3-5. První vlna, vlna A, je impuls v opačném směru předchozího trendu. Vlna B je korekcí vlny A a většinou provede retracement v maximálním Fibonnacciho poměru 61.8% (tzn. návrat o 61.8% vlny A). Vlna C je pak opět impuls a postupuje o 61.8% - 161.8% vlny A, přičemž nutně musí vlnu A alespoň minimálně překročit.^[1, 37, 38]



Obrázek 29: Korekční vlna cik-cak v býčím a medvědím trendu

9.2.2 Hladká

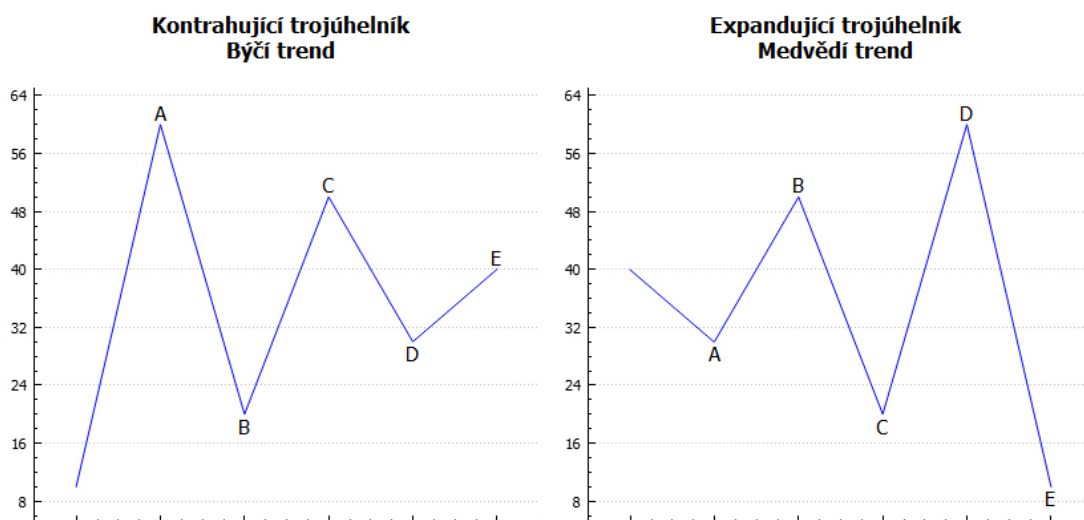
Vzor hladké korekční vlny (anglicky „flat“) je tvořen formací 3-3-5, tedy vlny A a B jsou korekce a vlna C impuls. Tato struktura určuje pouze počty vln v podvlnách. Z hlediska deformací se jedná o nejvariabilnější korekční vlnu - např. selhání vlny B nebo C, dvojité selhání, rozšíření, atd. Téměř ve všech variantách tvoří spíše pohyb do strany. I zde statisticky platí poměry definované Fibonacciho posloupností. Vlna B musí překročit retracement 61.8%, a vlna C musí být minimálně 38.2% délky vlny A.^[1, 37, 38]



Obrázek 30: Hladká korekční vlna v býčím a medvědím trendu

9.2.3 Trojúhelník

Jedná se o vzor ve tvaru 3-3-3-3-3, značí se písmeny A-E, a nejčastěji se vyskytuje ve vlně 4 a vlně B → vždy v předposlední vlně. Je poměrně obtížné jej při analýze rozpoznat, a právě tvar a umístění je jedním z nejdůležitějších faktorů. Vzor nebyl nikdy pozorován ve vlně 2. Vyskytuje se v několika variantách: symetrický, vzestupný, sestupný a inverzní rozšiřující se. Na konci formace trojúhelníku dochází k prolomení vývoje zpět do aktuálního směru trendu, a to ještě před protnutím pomyslných stran trojúhelníku.^[1, 37, 39]



Obrázek 31: Korekční vlny typu trojúhelník v obou trendech

9.2.4 Kombinace korekčních vln: „Dvojitě a trojitě trojky“

Jak již název sekce napovídá, jedná se o kombinaci různých (či stejných) typů korekčních vln za sebou. Při analýze se v korekčních vlnách poměrně často objevují dvě nebo tři korekční vlny za sebou. V takových případech se jednotlivé variace označují písmeny W, Y, případně Z. Pro „napojení“ jednotlivých variací je nutné, aby se daná korekční podvlna vrátila zpět, kde začíná následující z kombinace. Tyto „mezivlny“ se značí písmenem X a může se jednat o kterýkoliv typ korekční vlny, nejčastěji však Cik-cak. Vyskytují-li se v kombinaci korekční vlny stejného typu, jedná se o tzv. „dvojitě trojky“, resp. „trojitě trojky“. Jsou-li kombinovány korekční vlny různých typů, jedná se o tzv. „dvojitě kombinace“, resp. „trojitě kombinace“.

9.3 Analýza Elliottových vln

Analýza Elliottových vln spočívá v rozpoznání jednotlivých vzorů v časových řadách, nejčastěji na burzovním trhu při pohybu cen, jak jsem uvedl výše. Pro korektní analýzu je nutné respektovat pravidla pro jednotlivé vzory. Již při zamyšlení se nad touto tematikou je zřejmé, že čistá počítačová analýza je jen velmi těžko programovatelná, jelikož se jedná o „živý systém“, který má sice určitý řád, ale zároveň se také vyvíjí, obsahuje výjimky atd. Často nemá význam tato pravidla striktně dodržovat.

Než uvedu jednotlivá pravidla, je nutné definovat pojem „délka vlny“. Jedná se o pojem určující cenovou vzdálenost mezi dvěma vlnami. Je-li tedy např. vlna 2 na úrovni 245 Kč a vlna 3 pak stoupne na 360 Kč, délka této vlny je $360 - 245 = 115$ Kč.

Pravidla jednotlivých vzorů

Impulsní vlny:

Impuls, diagonální první, diagonální pátá a neúspěšná pátá

- konec vlny 2 nesmí přesáhnout začátek vlny 1
- vlna 3 rozšiřuje vlnu jedna a vždy výrazně přesáhne její vrchol
- vlna 3 nesmí být nejkratší impulsní fází (vlny 1, 3, 5)
- konec vlny 4 nedosáhne vrcholu vlny 1, s výjimkou variace diagonální první, kdy naopak vždy přesáhne vrchol vlny 1, ale nikdy její počátek
- konec vlny 4 variace neúspěšná pátá se může chovat oběma způsoby z předchozího bodu
- u variace neúspěšná pátá nepřesáhne vlna 5 vrchol vlny 3 (\approx neúspěch)

Pozn.: v případě neúspěšné páté je nutné, aby se jednalo o vlnu vyšší úrovně a striktně byl dodržen tvar 5-3-5-3-5.

Rekurzivní náhrady:

- vlna 1: impuls nebo diagonální první
- vlna 2: jakákoliv korekční vlna vyjma trojúhelníku
- vlna 3: impuls
- vlna 4: jakákoliv korekční vlna
- vlna 5: impuls a diagonální trojúhelník

Diagonální trojúhelník

- konec vlny 2 nesmí přesáhnout začátek vlny 1
- vlna 3 rozšiřuje vlnu jedna a vždy přesáhne její vrchol (ne tak výrazně jako impuls)

- vlna 3 nesmí být nejkratší impulsní fází (vlny 1, 3, 5)
- konec vlny 4 obvykle přesáhne (ale nemusí) vrchol vlny 1, ale nikdy nedosáhne počátku vlny 3

Rekurzivní náhrady:

- vlny 1, 2, 3: jakákoliv korekční vlna vyjma trojúhelníku
- vlny 4, 5: jakákoliv korekční vlna

Korekční vlny:

Cik-cak

- konec vlny B nesmí přesáhnout začátek vlny A
- vlna C rozšiřuje vlnu A a vždy přesáhne její vrchol

Rekurzivní náhrady:

- vlna A: impuls nebo diagonální první
- vlna B: jakákoliv korekční vlna
- vlna C: impuls nebo diagonální trojúhelník

Hladká

Rekurzivní náhrady:

- vlna A: jakákoliv korekční vlna vyjma trojúhelníku
- vlna B: jakákoliv korekční vlna
- vlna C: impuls nebo diagonální trojúhelník

Dvojitý a trojitý cik-cak

- vlna Y rozšiřuje vlnu W a vlna Z rozšiřuje vlnu Y a přesáhnou jejich vrcholy
- konec vln X a XX nesmí přesáhnout začátky předchozích vln, tedy W a Y

Rekurzivní náhrady:

- vlny W, Y, Z: cik-cak
- poslední „spojovací“ vlna - X u dvojitého a XX u trojitého cik-cak: jakákoliv korekční vlna
- spojovací vlna X u trojitého cik-cak: jakákoliv korekční vlna vyjma trojúhelníku

Dvojitá a trojitá kombinace

Rekurzivní náhrady:

- poslední dvě vlny formace - X a Y u dvojité, XX a Z u trojité kombinace: jakákoliv korekční vlna
- všechny ostatní vlny: jakákoliv korekční vlna vyjma trojúhelníku

Trojúhelník

Trojúhelník se vyskytuje ve dvou variantách - kontrahující (svírající se) a expandující (rozevírající se). Pro obě varianty platí stejné náhrady a pravidla jsou opačného charakteru.

- rozsah vlny C nepřesáhne, resp. přesahuje rozsah vlny B
- rozsah vlny D nepřesáhne, resp. přesahuje rozsah vlny C
- rozsah vlny E nepřesáhne, resp. přesahuje rozsah vlny D

Rekurzivní náhrady:

- vlny A, B, C: jakákoliv korekční vlna vyjma trojúhelníka
- vlny D, E: jakákoliv korekční vlna

Pro lepší výsledky analýzy je možné využít mnoha dalších poznatků z teorie Elliottových vln, jako např. Fibonnaciho posloupnost (poměry mezi jednotlivými čísly), využití tzv. „kanálů“, a dalších.^[40, 28, 29, 30]

9.4 Elliottovy vlny v přírodě

Jak jsem uvedl v úvodu své bakalářské práce, domnívám se, že fraktály definuje sama příroda. Elliottovy vlny jsou fraktály, proč by se tedy nemohly vyskytovat v přírodních jevech? Navíc stojí na základních vlastnostech lidí, resp. lidského mozku, na principu „nasycení a diety“. Tento princip ale funguje i v přírodě samotné, dojde-li kdekoli k přesycení, musí dojít i k redukci, která se někde zastaví. Poté dochází opět k sycení a redukci, atd. Jednou se ale příroda „rozhodne“, že přesycení je v takovém stavu a podruhé zase v jiném, jednou dříve, podruhé později. Proč by tedy nebylo možné, aby se číselné řady ve tvaru Elliottových vln vyskytovaly i jinde, než na burze?

O tomto tématu není mnoho dostupné literatury. Proto je sekce „Elliottovy vlny v přírodě“ pouze mojí úvahou a pozorováním. Jak jsem napsal v předchozím odstavci, myslím si, že Elliottovy vlny se vyskytují v přírodě stejně, jako jakékoliv jiné fraktální struktury. Domnívám se, že bychom je mohli najít např. při pozorování počtů jedinců určitých rostlin, v množství vyprodukovaného medu včelami, i na mnoha dalších místech. Ve své práci jsem se zaměřil na aktivitu Slunce.

V různých částech světa je již dlouhou dobu pozorována sluneční aktivita. Z internetu je možné získat a analyzovat data, která sahají překvapivě až do počátku 18. století. Jedná se o údaje obsahující tzv. „Wolfovo číslo“, neboli „relativní číslo slunečních skvrn“, které zavedl švýcarský matematik a astronom R. Wolf. Toto číslo je dáno vztahem⁴:

⁴Informace o Wolfovu čísle získány z [www stránek: http://www.pozorovanislunce.eu/vykladovy-slovnicek/relativni-cislo-slunecnich-skvrn.html](http://www.pozorovanislunce.eu/vykladovy-slovnicek/relativni-cislo-slunecnich-skvrn.html)

$$R = 10G + g,$$

- G ... počet skupin slunečních skvrn na viditelném disku Slunce
 g ... počet jednotlivých slunečních skvrn na viditelném disku Slunce

Data jsou zaznamenána v různých časových frekvencích, k dispozici jsou denní záznamy, měsíční, roční atd. Tyto údaje jsem se pokusil analyzovat za pomoci softwaru, který jsem ve své práci vytvořil.

Ještě se pokusím vysvětlit, proč by mohlo být užitečné analyzovat tato data z hlediska Elliottových vln. Odpověď je relativně zřejmá: kvůli predikci. Pokud by se podařilo prokázat ve sluneční aktivitě výskyt Elliottových vln, bylo by možné na základě analýzy odhadnout budoucí vývoj aktivity Slunce na krátkou dobu dopředu, a možná tak předejít některým událostem. Jedná se pouze o motivaci, ale i podrobnější výzkum by mohl být velmi zajímavý.

9.4.1 Experiment

Pro svůj experiment, při zkoumání výskytu Elliottových vln ve Sluneční aktivitě, jsem využil dat dostupných na internetových stránkách WDC-SILSO, Royal Observatory of Belgium, Brussels^[41]. Jedná se o data zachycující výše uvedené Wolfovo číslo 9.4, a to ve formě ročních, měsíčních a denních záznamů. Originální stažené soubory obsahují vždy několik sloupců s různými údaji. Sloupce jsem upravil a využil jen datum a Wolfovo číslo.

Vstupními daty mé aplikace je tedy CSV soubor se dvěma sloupci. V prvním je informace o datu zaznamenání Wolfova čísla, a ve druhém samotné relativní číslo slunečních skvrn. Algoritmus analýzy uvedu v kódu C++. Nejedná se o přesný kód, který jsem implementoval v aplikaci, nýbrž kód popisující algoritmus ve zjednodušené podobě.

```

// definuje vystupni analyzovana data
ElliottWave *analyzed = new ElliottWave();

// predikaty posledniho stavu v cyklu
bool impulse = false, correction = false, bull = false, bear = false;

// pruchod vsemi body
for (int point = 0; point < this->data.size(); point++) {
    // testovane vlny
    List<ElliottWave*> testedWaves = this->getWavesOfType(!impulse, !correction);

    // pruchod testovanymi vlnami
    bool waveFound = false;

    ListIterator <ElliottWave*> iterator (testedWaves);
    while ( iterator .hasNext()) {
        ElliottWave* current = iterator .next();

        // neni-li dostatek bodu pro naplneni aktualni vlny, pokracuje dalsi vlnou
        int necessaryPoints = current->getSubwavesNumber() + 1;
        if ((point + necessaryPoints) >= this->data.size()) {
            continue;
        }

        // vyzkousi nasadit n + 1 (pocet bodu definujicich vlnu + 1 pocatecni) bodu do aktualni vlny
        // a otestuje
        ElliottWave* test = ElliottWave::create(this.data, point, point + necessaryPoints);

        // otestuje validitu testovane vlny - je-li validni, ulozi body, nastavi predikaty a posune
        // se o delku vlny
        if (test.isValid(impulse, correction, bull, bear)) {
            waveFound = true;
            impulse = (current->getType() == ElliottWave::TYPE_IMPULSE);
            correction = !impulse;

            analyzed << test;
            point += test->getSubwavesNumber();

            break;
        } else {
            impulse = correction = bull = bear = false;
        }
    }

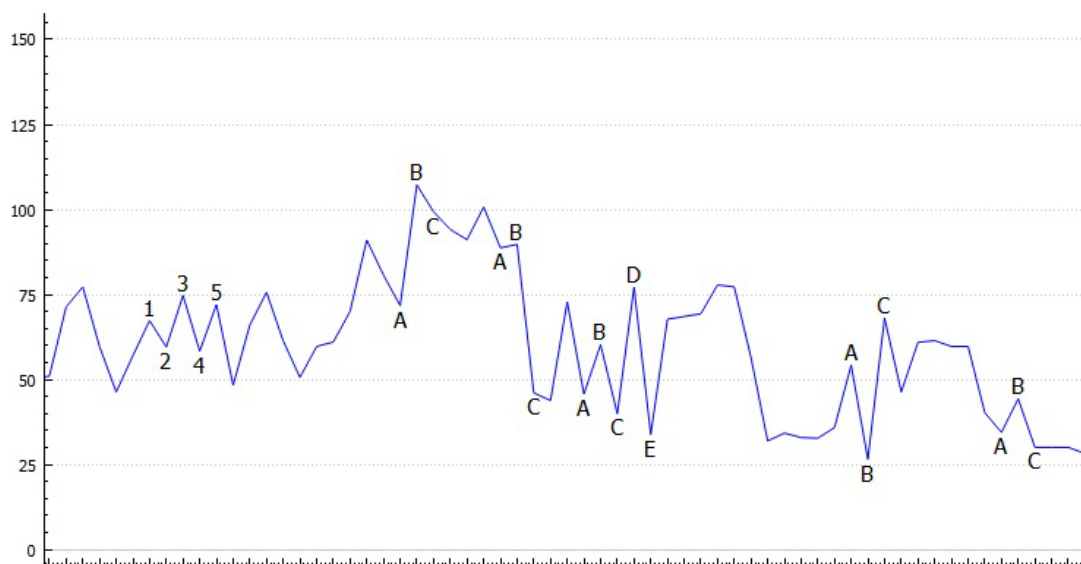
    // nebyla-li nalezena validni vlna, prida bod a pokracuje v cyklu
    if (!waveFound) {
        analyzed << this.data[point];
    }
}

```

Výpis 3: Algoritmus analýzy Elliottových vln

Každý typ testované vlny má implementovanou metodu definující její korektnost s danými hodnotami. Je ověřováno střídání podvln aktuální testované Elliottovy, a na základě těchto dvou vlastností je rozhodnuto o celkové validitě vlny.

Algoritmus odhalil existenci mnohých Elliottových vln ležících samostatně. Tento fakt bohužel nemá velkou vypovídající hodnotu, protože pro vyvození nějakých závěrů je nutné, aby na sebe vlny navazovaly a tvořili tak jednu dlouhou rekurzivní Elliottovu vlnu. Jedná se ale o analýzu na jednoduché úrovni. V práci není implementován rekurzivní charakter Elliottových vln. Algoritmus by bylo možné ještě mnohými způsoby vylepšit. Vylepšený algoritmus by pak mohl odhalit i další vazby.



Obrázek 32: Měsíční záznamy aktivity Slunce z hlediska Elliottových vln

10 Závěr

Když jsem poprvé slyšel přednášku na téma fraktální geometrie, okamžitě mě napadlo, že by se dala využít k účelům rozpoznání přírodních útvarů na základě „nedokonalé“ fotografie (obdobná využití jsem uvedl v sekci 8.3). A přestože mě studium a zkoumání fraktální geometrie přivedlo k mnoha dalším myšlenkám, možná se jednoho dne vrátím ke svému prvnímu nápadu a naprogramuji aplikaci, kterou jsem chtěl vytvořit již od zmínované přednášky, konkrétně rozpoznávání rostliny na základě fotografie její části.

Fraktální geometrie je vskutku rozmanitý obor plný velmi zajímavých faktů, které se pro většinu lidí na první pohled zdají být naprosto nedotčené „realitou“. Po bližším zkoumání však člověk zjistí, že nejenže je fraktální geometrie inspirována přírodou, pozná také, že fraktálních útvarů je kolem nás mnohem více, než útvarů popisovaných klasickou Eukleidovskou geometrií. A navíc ty, které jsou popisovány klasickou geometrií, jsou většinou stvořené člověkem, a naopak ty, které jsou fraktálními objekty, „nakreslila“ sama příroda.

Studium fraktální geometrie mi bylo obrovským přínosem z hlediska chápání matematiky i reality. Bylo zajímavé zjistit, že stále existuje „svět“ tak neprozkoumaný. Dle mého pozorování má fraktální geometrie nekonečný potenciál v mnoha oborech. Budu-li k tomu mít příležitost, chopím se jí, a fraktální geometrii se budu věnovat. symbolem teorie chaosu. ^[21]

11 Reference

Knihy

- [1] ZELINKA, Ivan, František VČELAŘ a Marek ČANDÍK. *Fraktální geometrie: principy a aplikace*. 1. vyd. Praha: BEN - technická literatura, 2006, 159 s. ISBN 80-730-0191-8.
- [2] MANDELBROT, B. *Fractal geometry of nature*. Vyd. 3. New York: Freeman and company, 1983, 468 s. ISBN 07-167-1186-9.
- [3] PEITGEN, Heinz-Otto, H JÜRGENS a Dietmar SAUPE. *Chaos and fractals: new frontiers of science*. 2nd ed. New York: Springer, c2004, xiii, 864 p. ISBN 03-872-0229-3.
- [4] BARNSLEY, M. *Fractals everywhere*. Boston: Academic Press, c1988, xii, 394 p., [16] p. of plates. ISBN 01-207-9062-9.
- [5] FALCONER, K. *Fractal geometry: mathematical foundations and applications*. New York: Wiley, c1990, xxii, 288 p. ISBN 04-719-2287-0.
- [6] PRUSINKIEWICZ, Przemyslaw a Aristid LINDENMAYER. *The algorithmic beauty of plants*. elektronická verze. New York: Springer-Verlag, c1990, xii, 228 p. ISBN 3540972978. Dostupné z: <http://algorithmicbotany.org/papers/abop/abop.pdf>

Vědecké práce

- [7] Fraktální geometrie. In: *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie* [online]. Praha: Jednota českých matematiků a fyziků, 1989 [cit. 2014-04-16]. Roč. 34, č. 5, s. 267-277. ISSN 0032-2423. Dostupné z: <http://dml.cz/handle/10338.dmlcz/138364>
- [8] EBRAHIMPOUR-KOMLEH, H., V. CHANDRAN a S. SRIDHARAN. *Face recognition using fractal codes*. Proceedings 2001 International Conference on Image Processing (Cat. No.01CH37205) [online]. IEEE, 2001, s. 58-61 [cit. 2014-04-16]. DOI: 10.1109/ICIP.2001.958050. Dostupné z: <http://ieeexplore.ieee.org/lpdocs/epic03/wrapper.htm?arnumber=958050>
- [9] LORENZ E., *Predictability; Does the Flap of a Butterfly's wings in Brazil Set Off a Tornado in Texas?* AAAS Section on Environmental Sciences, New Approaches to Global Weather: GARP (The Global Atmospheric Research Program) [online]. Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, 29. prosince 1972 [cit. 2015-01-03]. Dostupné z: http://eaps4.mit.edu/research/Lorenz/Butterfly_1972.pdf
- [10] LIN Chia-Hung, Jian-Liung CHEN, and Zwe-Lee GAING, *Combining Biometric Fractal Pattern and Particle Swarm Optimization-Based Classifier for Fingerprint Recognition* [online]. Hindawi Publishing Corporation, Mathematical Problems in Engineering Volume 2010, Article ID 328676, 14 pages. doi:10.1155/2010/328676 [cit. 2015-02-27]. Dostupné z:

- [11] CHAITANYA K., SRINIVASULU A., KAMALESH E., *Scale and rotation independent fingerprint recognition* [online]. International Journal of Computer Science and Information Technologies, Vol. 2 (4) , 2011, 1764-1773. ISSN 0975-9646 [cit. 2015-02-27]. Dostupné z:
- [12] FARHAN M., LOAY G., AZMI H., *Fingerprint Identification Using Fractal Geometry* [online]. International Journal of Advanced Research in Computer Science and Software Engineering Volume 4, Issue 1, January 2014. ISSN: 2277 128X [cit. 2015-02-27]. Dostupné z:

Diplomové práce

- [13] WIESNER R., *Užití a zneužití fraktálů, diplomová práce* [online]. Přírodovědecká fakulta, Masarykova univerzita v Brně, květen 2006 [cit. 2015-01-05]. Dostupné z: http://is.muni.cz/th/3506/fi_m/diplomka.pdf

Biografie

- [14] O'CONNOR J. J. a ROBERTSON E. F. *Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor* [online]. School of Mathematics and Statistics, University of St Andrews, Scotland, říjen 1998. Dostupné z: <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Cantor.html>
- [15] O'CONNOR J. J. a ROBERTSON E. F. *Waclaw Sierpinski* [online]. School of Mathematics and Statistics, University of St Andrews, Scotland, listopad 1997. Dostupné z: <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Sierpinski.html>
- [16] O'CONNOR J. J. a ROBERTSON E. F. *Niels Fabian Helge von Koch* [online]. School of Mathematics and Statistics, University of St Andrews, Scotland, květen 2000. Dostupné z: <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Koch.html>
- [17] O'CONNOR J. J. a ROBERTSON E. F. *Gaston Maurice Julia* [online]. School of Mathematics and Statistics, University of St Andrews, Scotland, prosinec 2008. Dostupné z: <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Julia.html>
- [18] O'CONNOR J. J. a ROBERTSON E. F. *Felix Hausdorff* [online]. School of Mathematics and Statistics, University of St Andrews, Scotland, listopad 2004. Dostupné z: <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Hausdorff.html>
- [19] *Aristid Lindenmayer* [online]. Wikipedia, the free encyclopedia, 3.12.2014. Dostupné z: http://en.wikipedia.org/wiki/Aristid_Lindenmayer
- [20] O'CONNOR J. J. a ROBERTSON E. F. *Benoit Mandelbrot* [online]. School of Mathematics and Statistics, University of St Andrews, Scotland, červenec 1999. Dostupné z: <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Mandelbrot.html>

- [21] O'CONNOR J. J. a ROBERTSON E. F. *Edward Norton Lorenz* [online]. School of Mathematics and Statistics, University of St Andrews, Scotland, červenec 2008. Dostupné z: http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Lorenz_Edward.html

Ostatní

- [22] BLELLOCH, Guy a Ben LIBLIT. *Algorithms in the "Real World": Lecture Notes (Fall 1997)*. Computer Science Department, Carnegie Mellon University, 2001, s. 47-50. Dostupné z: <http://www.cs.cmu.edu/~guyb/realworld/>
- [23] HOTAŘ, V. *Fraktální geometrie* [online]. Katedra sklářských strojů a robotiky, Fakulta strojní, Technická univerzita v Liberci, 21.11.2011. Dostupné z: <http://www.ksr.tul.cz/fraktaly/index.html>
- [24] *List of fractals by Hausdorff dimension* [online]. Wikipedia, the free encyclopedia [cit. 23.2.2015]. Dostupné z: http://en.wikipedia.org/wiki/List_of_fractals_by_Hausdorff_dimension
- [25] IANNACCONE, P a M KHOKHA. *Fractal geometry in biological systems: an analytical approach* [online]. Boca Raton, FL: CRC Press, c1996, 360 p. ISBN 084937636x. Dostupné z: https://books.google.cz/books?id=_N7Vt6HLStsC
- [26] BLELLOCH, Guy. *Introduction to Data Compression (January 31, 2013)*. Computer Science Department, Carnegie Mellon University, 2001, s. 47-50. Dostupné z: <http://www.cs.cmu.edu/afs/cs/project/pscico-guyb/realworld/www/compress.html>
- [27] TURNER, M. *Modelling nature with fractals* [online]. +plus magazine, 31.8.1998. Dostupné z: <http://plus.maths.org/content/modelling-nature-fractals>
- [28] *Elliott Wave Theory Basics Explained: Learn Elliott Wave Theory Basics* [online]. Traders Day Training, Stock Market Trading with Technical Analysis Charts [cit. 4.3.2015]. Dostupné z: <http://www.tradersdaytrading.com/elliott-wave.html>
- [29] OBEŠLO, P. *Elliottovy vlny: Obchodujeme Elliottovy vlny*. [online]. Finančník.cz, seriál Obchodujeme Elliottovy vlny, 2006 [cit. 4.3.2015]. Dostupné z: <http://www.financnik.cz/serial/elliottovy-vlny.html>
- [30] *Elliottovy vlny* [online]. Slovník serveru Quote.cz [cit. 4.3.2015]. Dostupné z: <http://www.quote.cz/slovník/498-elliottovy-vlny>
- [31] *Extension* [online]. Elliott Wave International, tutorial [cit. 4.3.2015]. Dostupné z: <http://www.elliottwave.com/tutorial/Lesson2/2-2.htm>
- [32] *Truncation* [online]. Elliott Wave International, tutorial [cit. 4.3.2015]. Dostupné z: <http://www.elliottwave.com/tutorial/Lesson2/2-3.htm>

- [33] *Leading Diagonals* [online]. Elliott Wave International, tutorial [cit. 4.3.2015]. Dostupné z: <http://www.elliottwave.com/tutorial/Lesson3/3-3.htm>
- [34] BULKOWSKI, T. *Bulkowski's Leading Diagonal Triangle* [online]. Bulkowski's thepatternsite.com [cit. 4.3.2015]. Dostupné z: <http://www.thepatternsite.com/EWleadingTriangle.html>
- [35] BULKOWSKI, T. *Bulkowski's Ending Diagonal Triangle* [online]. Bulkowski's thepatternsite.com [cit. 4.3.2015]. Dostupné z: <http://www.thepatternsite.com/EWdiagTriangle.html>
- [36] *Motive waves* [online]. Elliott Wave International, Basic Tenets of the Elliott Wave Principle [cit. 4.3.2015]. Dostupné z: <http://www.elliottwave.net/educational/basicitenets/basics2.htm>
- [37] DAVID, D. *Elliottovy vlny: Základy teorie, souhrn pravidel a praktické příklady využití*. [online]. Dostupné z: <http://danieldavid.sweb.cz/EW.pdf>
- [38] *Basic Wave Patterns: How a Zigzag Differs from a Flat* [online]. Elliott Wave International, By Editorial Staff, 20. leden 2011 [cit. 6.3.2015]. Dostupné z: <http://www.elliottwave.com/freeupdates/archives/2011/01/20/Basic-Wave-Patterns-How-a-Zigzag-Differs-from-a-Flat.aspx>
- [39] *Elliott Wave Theory Basics Explained: Learn Elliott Wave Theory Basics - Triangles* [online]. Traders Day Training, Stock Market Trading with Technical Analysis Charts [cit. 4.3.2015]. Dostupné z: http://www.tradersdaytrading.com/elliott_wave_theory.html
- [40] *The implementation of automatic analysis of the Elliott waves in MQL5* [online]. MQL5 Ltd., Metatrader 5 — examples, březen 2011 [cit. 15.4.2015]. Dostupné z: <https://www.mql5.com/en/articles/260>
- [41] SILSO World Data Center. *The International Sunspot Number* [online]. Royal Observatory of Belgium, avenue Circulaire 3, 1180 Brussels, Belgium. Dostupné z: <http://www.sidc.be/silso/>

Obrázky

- [42] *Georg Cantor* [online]. Wikipedia, the free encyclopedia [cit. 6.1.2015]. Dostupný z: http://en.wikipedia.org/wiki/Georg_Cantor
- [43] *Prominent Poles - Waclaw Sierpinski, mathematician* [online]. [cit. 6.1.2015]. Dostupný z: http://www.angelfire.com/scifi2/rsrolecki/waclaw_sierpinski.html
- [44] *Helge von Koch* [online]. Wikipedia, the free encyclopedia [cit. 6.1.2015]. Dostupný z: http://cs.wikipedia.org/wiki/Helge_von_Koch

-
- [45] *Felix Hausdorff* [online]. Wikipedia, the free encyclopedia [cit. 6.1.2015]. Dostupný z: http://cs.wikipedia.org/wiki/Felix_Hausdorff
- [46] *Perneczky Géza: Mire jó a fraktálfilozófia?* [online]. [cit. 6.1.2015]. Dostupný z: <http://members.iif.hu/visontay/ponticulus/rovatok/hidverok/perneczky-01.html>
- [47] *Benoit Mandelbrot* [online]. Wikipedia, the free encyclopedia [cit. 6.1.2015]. Dostupný z: http://en.wikipedia.org/wiki/Benoit_Mandelbrot
- [48] *Lorenz system* [online]. Wikipedia, the free encyclopedia [cit. 6.1.2015]. Dostupný z: http://en.wikipedia.org/wiki/Lorenz_system
- [49] *Pythagorův strom* [online]. Wikipedia, the free encyclopedia [cit. 22.2.2015]. Dostupný z: http://cs.wikipedia.org/wiki/Pythagor%C5%AFv_strom
- [50] *Papratka samičí (Athyrium filix-femina L., Roth.)* [online]. Geografický ústav, Přírodovědecká fakulta, Masarykova univerzita, 2010 [cit. 22.2.2015]. Dostupný z: http://is.muni.cz/do/rect/el/estud/prif/ps10/biogeogr/web/index_Ath_fil.html
- [51] *L-system* [online]. Wikipedia, the free encyclopedia [cit. 6.4.2015]. Dostupný z: <http://en.wikipedia.org/wiki/L-system>
- [52] *Cantor function* [online]. Wikipedia, the free encyclopedia [cit. 6.4.2015]. Dostupný z: http://en.wikipedia.org/wiki/Cantor_function
- [53] *Elliott wave principle* [online]. Wikipedia, the free encyclopedia [cit. 1.3.2015]. Dostupný z: http://en.wikipedia.org/wiki/Elliott_wave_principle
- [54] *Feina malá galerie fraktálů* [online]. [cit. 1.3.2015]. Dostupné z: <http://fraktaly.shy.cz/>